Vektorové priestory

Lineárna algebra

Barbora Pokorná

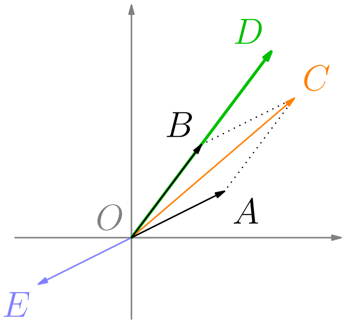
KAG, FMFI UK

2020

Úvod

- základný význam pre lineárnu algebru a analytickú geometriu
- patria medzi najdôležitejšie matematické konštrukcie a využívajú sa takmer vo všetkých odvetviach matematiky

- stredná škola: vektor $\sim$ smer
  $S =$ množina všetkých orientovaných úsečiek v rovine Oxy začínajúcich v O
- $(S, +)$ je komutatívna grupa
  máme $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$ a $-\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OE}$
- vieme definovať operáciu:
  $\mathbb{R} \times S \to S,\ \ (\alpha, \overrightarrow{OA}) \mapsto \alpha.\overrightarrow{OA}$
  máme $2\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD}$
- podobne pre $T =$ množinu všetkých orientovaných úsečiek v priestore $Oxyz$ začínajúcich v O



Obr. 1: Prvky z množiny S.

Vektorový priestor

DEFINÍCIA

Nech sú dané pole R a neprázdna množina V. Nech na V je definovaná binárna operácia $+$ a nech je definované zobrazenie $R \times V \to V$, $(\alpha, \vec{x}) = \alpha\vec{x}$. Množina V sa nazýva vektorový priestor nad poľom R, ak sú splnené nasledujúce podmienky:

1. $(V, +)$ je abelovská grupa, jej neutrálny prvok ozn. $\vec{0}$,
2. $(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$ pre $\forall \alpha, \beta \in R$ a $\forall \vec{x} \in V$,
3. $\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$ pre $\forall \alpha \in R$ a $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V$,
4. $\alpha(\beta\vec{x}) = (\alpha\beta)\vec{x}$ a $\forall \alpha, \beta \in R$ a $\forall \vec{x} \in V$,
5. $1\vec{x} = \vec{x}$ pre $\forall \vec{x} \in V$.

Poznámky:

- prvky z R voláme skaláry a budeme ich ozn. $\alpha, \beta, \gamma, \dots$
- prvky z V voláme vektory a budeme ich ozn. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$
- podmienky (1) – (5) sa volajú axiómy vektorového priestoru

Príklady vektorových priestorov

- množiny S, T z úvodu sú vektorové priestory nad poľom $\mathbb{R}$
- nech R je pole a $V = \{\vec{0}\}$
  binárna operácia $+ :\ \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$
  zobrazenie $R \times V \to V$ je definované $(\alpha, \vec{0}) \mapsto \vec{0}$

  potom $V = \{\vec{0}\}$ je VP nad R a voláme ho nulový vektorový priestor (je to najmenší VP)
- nech R je pole, $V = R^n = \underbrace{R \times \cdots \times R}_{\text{n-krát}}$
  binárna operácia $+$ na R^n je def. ako $(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$
  zobrazenie $R \times V \to V$ je definované $\alpha(x_1, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)$

  potom $V = R^n$ je vektorový priestor nad poľom R
- množina $\mathbb{Z}_3^3$ je vektorový priestor nad poľom $\mathbb{Z}_3$

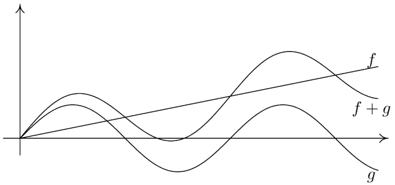
Príklady vektorových priestorov

- pole $\mathbb{R}$, množina $V = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$
  (reálne funkcie na $\mathbb{R}$, ozn. $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$)

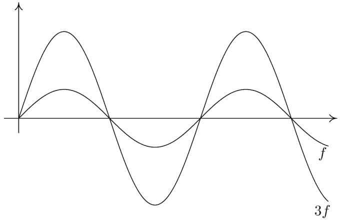
  binárnu operáciu $+$ na $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ definujeme
  pre $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ako $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

  zobrazenie $\mathbb{R} \times V \to V$ definujeme
  pre $\alpha \in \mathbb{R}$ a $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ definujeme $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$

  potom $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ je vektorový priestor nad poľom $\mathbb{R}$



Obr. 2: Binárna operácia $+\colon V \times V \to V$.



Obr. 3: Zobrazenie $\mathbb{R} \times V \to V$.

Vlastnosti vektorového priestoru

VETA

Nech V je vektorový priestor nad poľom R. Potom

1. $0\vec{x} = \vec{0}$ pre $\forall \vec{x} \in V$
2. $(-1)\vec{x} = -\vec{x}$ pre $\forall \vec{x} \in V$
3. $\alpha\vec{0} = \vec{0}$ pre $\forall \alpha \in R$.

DÔKAZ

1. použijúc axiómy VP máme $\vec{x} = 1\vec{x} = (1+0)\vec{x} = 1\vec{x} + 0\vec{x} = \vec{x} + 0\vec{x}$. Keďže $(V, +)$ je abelovská grupa, tak $0\vec{x}$ je neutrálny prvok, t. j. $0\vec{x} = \vec{0}$.
2. použijúc dokázané (1) skúmajme $\vec{x} + (-1)\vec{x} = 1\vec{x} + (-1)\vec{x} = (1 + (-1))\vec{x} = 0\vec{x} = \vec{0}$. Keďže $(V, +)$ je abelovská grupa, tak opačný prvok k prvku $\vec{x}$ je $(-1)\vec{x}$, čiže $-\vec{x} = (-1)\vec{x}$.
3. použijúc dokázané (1), (2) počítajme $\alpha\vec{0} = \alpha(\vec{x} + (-\vec{x})) = \alpha\vec{x} + \alpha(-\vec{x}) = \alpha\vec{x} + \alpha(-1)\vec{x} = \alpha\vec{x} + (-\alpha)\vec{x} = (\alpha - \alpha)\vec{x} = 0\vec{x} = \vec{0}$

Vektorový podpriestor

DEFINÍCIA

Nech V je vektorový priestor nad poľom R a nech $D \neq 0$ je podmnožina množiny V. Hovoríme, že D je vektorový podpriestor priestoru V, ak D je vektorový priestor nad poľom R, pričom sčitovanie prvkov z D je zúžením sčitovania prvkov z V a násobenie prvkov z D prvkami z R je zúžením násobenia prvkov z V prvkami z R.

PRÍKLAD

Podmnožina $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z = 0\}$ je vektorový podpriestor v $\mathbb{R}^3$.

- pre $(a, b, 0), (x, y, 0) \in D$ máme $(a, b, 0) + (x, y, 0) = (a + x, b + y, 0) \in D$. Teda zúženie sčitovania v $\mathbb{R}^3$ definuje binárnu operáciu na D.
- $(D, +)$ je komutatívna grupa
- pre $\alpha \in \mathbb{R},\ (x, y, 0) \in D$ dostávame $\alpha(x, y, 0) = (\alpha x, \alpha y, 0) \in D$. Teda zúženie násobenia vektorov z $\mathbb{R}^3$ skalármi dáva násobenie prvkov v D skalármi, s výsledkom v D.
- axiómy (2) – (5) platia v $\mathbb{R}^3$ a teda aj v D

Príklady vektorových podpriestorov

- ak V je vektorový priestor nad poľom R, $D = \{\vec{0}\}$ je vektorový podpriestor vo V
- V je vektorový podpriestor vo V
- $D = \{(a, 1) \in \mathbb{R}^2, a \in \mathbb{R}\}$ nie je vektorový podpriestor vo $V = \mathbb{R}^2$, lebo $(x, 1) + (y, 1) = (x + y, 2) \notin D$
- $A = \{\vec{a}\}$ nie je vektorový podpriestor v $\mathbb{R}^2$, lebo $0\vec{a} = \vec{0} \notin A$

Kritériá vektorového priestoru

VETA

Nech V je vektorový priestor nad poľom R. Neprázdna množina $D \subset V$ je vektorovým podpriestorom priestoru V práve vtedy, keď je splnená hocikterá z týchto dvoch ekvivalentných podmienok:

1. pre $\forall \vec{x}, \vec{y} \in D$ a $\forall \alpha \in R$ je $\vec{x} + \vec{y} \in D$ a $\alpha\vec{x} \in D$
2. pre $\forall \vec{x}, \vec{y} \in D$ a $\forall \alpha, \beta \in R$ je $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \in D$.

DÔKAZ pre (1)

- D je VPP $\Rightarrow$ (1) (nutná podmienka)
  Podmienka (1) je splnená z definície VPP.
- (1) $\Rightarrow$ D je VPP (postačujúca podmienka)
  Ak $\vec{x} \in D$, tak pre $\alpha = 0$ je $0\vec{x} \in D$ a tiež $0\vec{x} = \vec{0}$, lebo V je VP. Teda $\vec{0} \in D$. Rovnako $(-1)\vec{x} = -\vec{x} \in D$. Takže ak $\vec{x}, \vec{y} \in D$, tak aj $\vec{x} + (-\vec{y}) \in D$, čo znamená, že $(D, +)$ je podgrupa $(V, +)$. Vďaka (1) máme pre $\alpha \in R$ a $\vec{x} \in D$ aj $\alpha\vec{x} \in D$. Axiómy vekt. priestoru platia v D, lebo platia vo V.

Príklad použitia kritéria VPP

PRÍKLAD

Rozhodnite, či je množina $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = y\}$ vektorovým podpriestorom vektorového priestoru $V = \mathbb{R}^2$ nad poľom $\mathbb{R}$.

RIEŠENIE

- $P \neq \emptyset$, lebo $(0, 0) \in P$
- pre $(a, a), (b, b) \in P$ máme $(a, a) + (b, b) = (a + b, a + b) \in P$
- pre $(x, x) \in P$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ máme $\alpha(x, x) = (\alpha x, \alpha x) \in P$
- záver: Množina P spĺňa kritérium (1) vektorového podpriestoru a teda je VPP v $\mathbb{R}^2$.

Prienik vektorových podpriestorov

VETA

Ak C, D sú vektorové podpriestory vektorového priestoru V nad poľom R, tak aj ich prienik $C \cap D$ je vektorový podpriestor vo V.

DÔKAZ

- $\vec{0} \in C$, $\vec{0} \in D$ a teda $\vec{0} \in C \cap D \neq \emptyset$
- nech $\vec{x}, \vec{y} \in C \cap D$. Potom $\vec{x}, \vec{y} \in C$ a teda $\vec{x} + \vec{y} \in C$. Podobne $\vec{x}, \vec{y} \in D$ a teda $\vec{x} + \vec{y} \in D$. Preto $\vec{x} + \vec{y} \in C \cap D$.
- nech $\alpha \in R$ a $\vec{x} \in C \cap D$. Potom $\vec{x} \in C$ a teda $\alpha\vec{x} \in C$. Podobne $\vec{x} \in D$ a teda $\alpha\vec{x} \in D$. Preto $\alpha\vec{x} \in C \cap D$.

Poznámka: Nech $\mathscr{S}$ je ľubovoľný neprázdny systém vektorových podpriestorov vektorového priestoru V nad poľom R. Potom aj prienik tohoto systému, $\bigcap_{D \in \mathscr{S}} D$, je vektorový podpriestor vo V.

Lineárna kombinácia vektorov

DEFINÍCIA

Nech V je vektorový priestor nad poľom R. Nech $k \in \mathbb{N}$ a nech $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ je k-členná postupnosť vektorov vo V. Ak $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ je k-členná postupnosť skalárov z R, tak výraz $\alpha_1\vec{x}_1 + \dots + \alpha_k\vec{x}_k$ sa nazýva lineárna kombinácia postupnosti vektorov $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ s koeficientami $\alpha_1, \dots, \alpha_k$. Vektor $\vec{a} = \alpha_1\vec{x}_1 + \dots + \alpha_k\vec{x}_k \in V$ je hodnota tejto lineárnej kombinácie.

Poznámka: Sčitovanie vektorov je komutatívne, t. j. nezáleží na poradí jednotlivých sčítancov.

PRÍKLADY

- nech $V = \mathbb{R}^2$ a $R = \mathbb{R}$
  $(2,4) = 2(1,0) + 4(0,1)$, čiže $(2,4)$ je LK vektorov $(1,0), (0,1)$
  $(2,4) = 2(1,0) + 4(0,1) + 0(1,1)$ čiže $(2,4)$ je aj LK vektorov $(1,0), (0,1), (1,1)$
  vidíme, že bude mať zmysel uvažovať o akomsi minimálnom počte „generátorov“
- nech $\vec{x}, \vec{y} \in V$ nad R: ak $\vec{x} = \beta\vec{y}$, potom $\vec{x}$ je LK vektora $\vec{y}$
- nech $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \in V$ nad R: pre $\vec{0} = 0\vec{x}_1 + \dots + 0\vec{x}_n$, čiže $\vec{0}$ je LK vektorov $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$

Lineárny obal

VETA

Nech $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k\}$ pre $k \in \mathbb{N}$ je podmnožina vektorového priestoru V nad poľom R. Potom množina hodnôt všetkých možných lineárnych kombinácií vektorov z $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k\}$ je vektorový podpriestor vo V a voláme ho lineárny obal množiny $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k\}$, ozn. ho $[\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k]$.

DÔKAZ

- $[\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k] \neq \emptyset$, lebo $\vec{0}$ ako hodnota triviálnej kombinácie tam patrí
- nech $\vec{a}, \vec{b} \in [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k]$, potom
  $\vec{a}+\vec{b} = (\alpha_1\vec{x}_1+\dots+\alpha_k\vec{x}_k)+(\beta_1\vec{x}_1+\dots+\beta_k\vec{x}_k) = (\alpha_1+\beta_1)\vec{x}_1+\dots+(\alpha_k+\beta_k)\vec{x}_k \in [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k]$
- nech $\vec{a} \in [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k]$ a $\gamma \in R$, potom
  $\gamma\vec{a} = \gamma(\alpha_1\vec{x}_1 + \dots + \alpha_k\vec{x}_k) = (\gamma\alpha_1)\vec{x}_1 + \dots + (\gamma\alpha_k)\vec{x}_k \in [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k]$

PRÍKLAD

Vo $V = \mathbb{R}^3$ máme vektorový podpriestor $[(1,0,0),(0,1,0)] = \{(a,b,0) \in \mathbb{R}^3, a, b \in \mathbb{R}\}$.

Vlastnosti lineárneho obalu

- $[\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k]$ sa nezmení, ak zmeníme usporiadanie vektorov $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k$
- platí $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k\} \subset [\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k]$, lebo $\forall \vec{x}_i = 0\vec{x}_1 + \cdots + 0\vec{x}_{i-1} + 1\vec{x}_i + 0\vec{x}_{i+1} + \cdots + 0\vec{x}_k$

VETA

Ak D je vektorový podpriestor vektorového priestoru V nad poľom R. Potom ak $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k\} \subset D$, tak aj $[\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k] \subset D$.

DÔKAZ

Nech $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k \in D$, zoberme $\vec{a} = \alpha_1\vec{x}_1 + \cdots + \alpha_k\vec{x}_k$. Ukážeme, že $\vec{a} \in D$ pomocou MI vzhľ. na počet nenulových koeficientov $\alpha_i \in R$, ozn. n. Samozrejme $0 \leq n \leq k$.

- Ak $n = 0$, tak $\vec{a} = 0\vec{x}_1 + \cdots + 0\vec{x}_k = \vec{0}$ a ten patrí do D, lebo je to VPP.
- Ak $n = 1$, tak $\vec{a} = \alpha_i\vec{x}_i$ pre ten jediný $\alpha_i \neq 0$. Potom $\vec{a} \in D$ podľa kritéria (1) VPP.
- Majme IP: každá LK vektorov z $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k\}$ s nanajvýš s nenulovými koeficientam patrí do D.
- Potom pre $n = s + 1$ máme $\vec{a} = \beta_1\vec{y}_1 + \cdots + \beta_s\vec{y}_s + \beta_{s+1}\vec{y}_{s+1}$, kde množina $\{\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_s, \vec{y}_{s+1}\}$ je vybraná z $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k\}$ podľa nenulových α_i. Z IP vieme potom $\vec{a}$ zapísať ako $\vec{a} = \vec{b} + \beta_{s+1}\vec{y}_{s+1}$, kde $\vec{b} \in D$. A teda aj $\vec{a} \in D$ podľa kritéria VPP.

„Najúspornejšie“ vyjadrenie lineárneho obalu

VETA

Nech $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k\}$ pre $k \in \mathbb{N}$ je podmnožina vektorového priestoru V nad poľom R. Potom $[\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k, \vec{y}] = [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k]$ práve vtedy, keď vektor $\vec{y}$ je lin. kombináciou vektorov $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$.

DÔKAZ

1. nech $[\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k, \vec{y}] = [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k]$
   Potom $\vec{y} \in [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k, \vec{y}]$ a teda z rovnosti priestorov aj $\vec{y} \in [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k]$. To ale znamená, že $\vec{y}$ sa dá zapísať ako lineárna kombinácia vektorov $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$.
2. nech $\vec{y}$ je lineárnou kombináciou vektorov $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$
   Keďže $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k\} \subset [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k, \vec{y}]$, tak aj $[\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k] \subset [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k, \vec{y}]$.
   Z predpokladu je $\vec{y}$ LK vektorov $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ a teda $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k, \vec{y}\} \subset [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k]$.
   Z predchádzajúcej vety teda aj $[\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k, \vec{y}] \subset [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k]$.
   Teda tieto dva lineárne obaly sa v skutočnosti rovnajú.

Pozn.: veta nám dáva návod, ako dostať „najúspornejšie“ vyjadrenie lineárneho obalu množiny $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k\}$. Napríklad, vo $V = \mathbb{R}^3$ máme $[(1,0,0),(2,5,0),(0,1,0)] = [(1,0,0),(0,1,0)]$.

Zoznam použitých obrázkov

- obr. 2, 3: Martin Sleziak
- obr. 1: Barbora Pokorná