# Lineárna (ne)závislosť vektorov

## Lineárna algebra

Barbora Pokorná

KAG, FMFI UK

2020

# Lineárna závislosť a nezávislosť vektorov

## DEFINÍCIA

Lineárna kombinácia, ktorej aspoň jeden koeficient je nenulový sa nazýva netriviálna. V opačnom prípade je lineárna kombinácia triviálna.

## DEFINÍCIA

Nech $V$ je vektorový priestor nad poľom $R$ a nech $k \in \mathbb{N}$.

- Postupnosť $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ vo $V$ je lineárne závislá, ak nulový vektor $\vec{0} \in V$ sa dá vyjadriť ako netriviálna lineárna kombinácia vektorov $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$, t. j.
  $\exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_k \in R$ nie všetky nulové, také, že $\alpha_1 \vec{x}_1 + \dots + \alpha_k \vec{x}_k = \vec{0}$.
- Postupnosť $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ je lineárne nezávislá, ak nie je lineárne závislá, t. j.
  $\beta_1 \vec{x}_1 + \dots + \beta_k \vec{x}_k = \vec{0}$ iba pre $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k = 0$.

# Priklady

- Rozhodnite, či vektory $(1, 3), (2, 2), (5, -1) \in \mathbb{R}^2$ sú lineárne závislé.

  Riešime rovnicu $\alpha(1, 3) + \beta(2, 2) + \gamma(5, -1) = (0, 0)$ pre $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$,
  čiže hľadáme riešenia lineárneho systému

  $$\begin{aligned} \alpha + 2\beta + 5\gamma &= 0 \\ 3\alpha + 2\beta - \gamma &= 0. \end{aligned}$$

  Gaussovou metódou získame množinu riešení $\{(3p, -4p, p) \in \mathbb{R}^3; p \in \mathbb{R}\}$,
  ktorá obsahuje nenulové riešenie (a nielen jedno), napr. $(3, -4, 1)$.

  Naozaj, $3(1, 3) - 4(2, 2) + 1(5, -1) = (0, 0) = \vec{0}$.

  Teda dané tri vektory sú lineárne závislé.

# Príklady

- Rozhodnite, či vektory $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1) \in \mathbb{R}^3$ sú lineárne závislé.

  Riešime rovnicu $\alpha(1,0,0)+\beta(0,1,0)+\gamma(0,0,1)=(0,0,0)$ pre $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$,
  čiže dostávame $(\alpha,\beta,\gamma)=(0,0,0)$ a teda $\alpha=0,\beta=0,\gamma=0$.

  Teda dané tri vektory sú lineárne nezávislé.

- Rozhodnite, či vektory $\vec{0},\vec{x}_2,\ldots,\vec{x}_k \in V$ sú lineárne závislé.

  Nulový vektor vieme určite zapísať ako
  $\vec{0}=1.\vec{0}+0.\vec{x}_2+\cdots+0.\vec{x}_k$, pre $\alpha_1=1$ a $\alpha_2=\cdots=\alpha_k=0$.

  Teda postupnosť vektorov obsahujúca nulový vektor je lineárne závislá.

# Príklady

Vektor $\vec{a} \in V$ je lineárne nezávislý $\Leftrightarrow \vec{a} \neq \vec{0}$. (t. j. $\vec{a} \in V$ je LZ $\Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$)

- ak $\vec{a} = \vec{0}$, tak $1.\vec{a} = 1.\vec{0} = \vec{0}$, teda $\vec{0}$ je LZ
- ak $\vec{a} \neq \vec{0}$, tak skúmajme $\alpha\vec{a} = \vec{0}$ pre $\alpha \in R$.
  Ak $\alpha \neq 0$, tak $\exists\, \alpha^{-1} \in R$, že po prenásobení rovnice dostaneme $(\alpha^{-1}\alpha)\vec{a} = \vec{0}$, a z toho máme $\vec{a} = \vec{0}$, čo je spor.
  Preto musí byť $\alpha = 0$ a teda $\vec{a}$ je LN.

Dva nenulové vektory $\vec{x}, \vec{y} \in V$ sú lineárne závislé $\Leftrightarrow$ jeden z nich je násobkom druhého.

- nech $\vec{x} \neq \vec{0} \ \wedge\ \vec{y} \neq \vec{0} \ \wedge$ sú LZ. To znamená, že $\exists\, \alpha, \beta \in R$ (nie súčasne nulové) také, že $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} = \vec{0}$.
  Nech $\alpha \neq 0$. Potom $\exists\, \alpha^{-1} \in R$, že po prenásobení rovnice dostaneme $\vec{x} = -(\alpha^{-1}\beta)\vec{y}$.
- nech $\vec{x} = \gamma\vec{y}$ pre $\gamma \neq 0$. Opačný vektor je potom $-\vec{x} = (-\gamma)\vec{y}$ pre $-\gamma \neq 0$. Potom máme $\vec{0} = \vec{x} + (-\vec{x}) = 1.\vec{x} + (-\gamma)\vec{y}$, čím sme získali nulový vektor ako lineárnu kombináciu s nenulovými koeficientami. A teda $\vec{x}, \vec{y}$ sú LZ.

# Kritérium lineárnej závislosti (1)

VETA

Postupnosť vektorov $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k$ $(k \geq 2)$ vo vekt. priestore $V$ nad poľom $R$ je lineárne závislá práve vtedy, keď aspoň jeden jej člen je lineárnou kombináciou ostatných.

DÔKAZ

- „$\Rightarrow$“: Nech postupnosť $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k$ je lineárne závislá. Potom pre vhodné koeficienty $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ môžeme napísať nulový vektor ako $\vec{0} = \alpha_1\vec{x}_1 + \cdots + \alpha_k\vec{x}_k$, kde aspoň jedno $i$ je také, že $\alpha_i \neq 0$. Túto rovnicu môžeme upraviť na tvar $\alpha_i\vec{x}_i = -\alpha_1\vec{x}_1 - \ldots - \alpha_{i-1}\vec{x}_{i-1} - \alpha_{i+1}\vec{x}_{i+1} - \ldots - \alpha_k\vec{x}_k$. Keďže $\alpha_i \neq 0$, určite existuje $\alpha_i^{-1} \in R \setminus \{0\}$, ktorým môžeme rovnicu vynásobiť. Tým dostaneme vyjadrenie člena $\vec{x}_i$ ako lineárnu kombináciu $\vec{x}_i = -\alpha_1\alpha_i^{-1}\vec{x}_1 - \ldots - \alpha_{i-1}\alpha_i^{-1}\vec{x}_{i-1} - \alpha_{i+1}\alpha_i^{-1}\vec{x}_{i+1} - \ldots - \alpha_k\alpha_i^{-1}\vec{x}_k$.
- „$\Leftarrow$“ : Nech $\vec{x}_j = \beta_1\vec{x}_1 + \cdots + \beta_{j-1}\vec{x}_{j-1} + \beta_{j+1}\vec{x}_{j+1} + \cdots + \beta_k\vec{x}_k$ pre niektoré $j \in \{1, \ldots, k\}$. Potom sú vektory $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k$ lineárne závislé, lebo vieme $\vec{0}$ zapísať ako netriviálnu kombináciu $\vec{0} = \beta_1\vec{x}_1 + \cdots + \beta_{j-1}\vec{x}_{j-1} + (-1)\vec{x}_j + \beta_{j+1}\vec{x}_{j+1} + \cdots + \beta_k\vec{x}_k$, pretože $-1 \neq 0$ v každom poli.

# Kritérium lineárnej závislosti (2)

## VETA

Postupnosť nenulových vektorov $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k$ ($k \geq 2$) vo vekt. priestore $V$ nad poľom $R$ je lineárne závislá práve vtedy, keď aspoň jeden jej člen $\vec{x}_i, (i \geq 2)$ je lineárnou kombináciou členov pred ním.

## DÔKAZ

- „$\Rightarrow$": Nech postupnosť $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k$ je lineárne závislá. Potom pre koeficienty $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, nie všetky nulové, môžeme napísať nulový vektor ako $\vec{0} = \alpha_1\vec{x}_1 + \cdots + \alpha_k\vec{x}_k$. Nech $j$ je najväčší index taký, že $\alpha_j \neq 0$. Teda máme vlastne $\vec{0} = \alpha_1\vec{x}_1 + \cdots + \alpha_j\vec{x}_j$. Určite $j \geq 2$, lebo inak by sme dostali $\vec{0} = \alpha_1\vec{x}_1$ a my máme $\vec{x}_1 \neq \vec{0}$. Ďalej, z rovnice vieme vyjadriť $\alpha_j\vec{x}_j = -\alpha_1\vec{x}_1 - \ldots - \alpha_{j-1}\vec{x}_{j-1}$. Túto rovnicu vieme vynásobiť prvkom $\alpha_j^{-1}$ a dostaneme, že $\vec{x}_j = -\alpha_1\alpha_j^{-1}\vec{x}_1 - \ldots - \alpha_{j-1}\alpha_j^{-1}\vec{x}_{j-1}$. Čiže vektor $\vec{x}_j$ je lineárnou kombináciou $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_{j-1}$.
- „$\Leftarrow$" : Nech $\vec{x}_j = \beta_1\vec{x}_1 + \cdots + \beta_{j-1}\vec{x}_{j-1}$ pre niektoré $j \in \{1, \ldots, k\}$. Potom ale rovnako $\vec{x}_j = \beta_1\vec{x}_1 + \cdots + \beta_{j-1}\vec{x}_{j-1} + 0.\vec{x}_{j+1} + \cdots + 0.\vec{x}_k$. Potom sú vektory $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k$ lineárne závislé, lebo vieme $\vec{0}$ zapísať ako netriviálnu kombináciu $\vec{0} = \beta_1\vec{x}_1 + \cdots + \beta_{j-1}\vec{x}_{j-1} + (-1)\vec{x}_j + 0\vec{x}_{j+1} + \cdots + 0\vec{x}_k$.

# Generátory vektorového priestoru

## VETA

Postupnosť vektorov $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ $(k \geq 2)$ vo vekt. priestore $V$ nad poľom $R$ je lineárne závislá práve vtedy, keď existuje $j \in \{1, \dots, k\}$ také, že $[\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k] = [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{j-1}, \vec{x}_{j+1}, \dots, \vec{x}_k]$.

## DEFINÍCIA (generátory VP)

Hovoríme, že prvky množiny $M \subset V$ generujú vektorový priestor $V$ nad poľom $R$, ak $[M] = V$.

## PRÍKLADY

- vektory $(1, 0, 0), (0, 1, 0)$ generujú vektorový podpriestor $S = \{(a, b, 0) \in \mathbb{R}^3; a, b \in \mathbb{R}\}$ vo VP $\mathbb{R}^3$ nad poľom $\mathbb{R}$
- keďže $[(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)] = \mathbb{R}^3$, tak množina $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ generuje vektorový priestor $\mathbb{R}^3$

# Dôsledok generovania vektorového priestoru

VETA

Nech postupnosť vektorov $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k$ vo vekt. priestore $V$ nad poľom $R$ je lineárne nezávislá, pričom nech $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k\}$ negeneruje priestor $V$. Potom existuje $\vec{x}_{k+1} \in V$ taký, že vektory $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k, \vec{x}_{k+1}$ sú lineárne nezávislé.

VETA

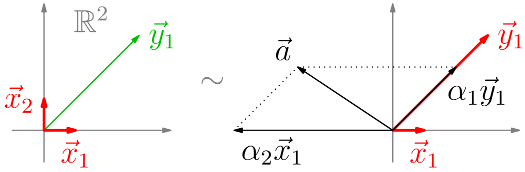
Konečná množina vektorov obsahujúca lineárne závislú podmnožinu je lineárne závislá.
Každá podmnožina konečnej lineárne nezávislej množiny vektorov je lineárne nezávislá.

VETA (Steinitzova)

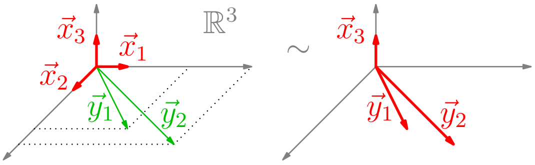
Nech $V$ je vektorový priestor nad poľom $R$ a nech ho generujú nenulové vektory $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k \in V$, t. j. $[\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k] = V$. Zároveň, nech $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_j$ $(j \in \mathbb{N})$ je nejaká postupnosť lineárne nezávislých vektorov vo $V$. Potom

a) $j \leq k$

b) $k - j$ vektorov spomedzi $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k$ možno vybrať a pridať k $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_j$ tak, že vzniknutá množina $k$ vektorov generuje celý priestor $V$.




Obr. 1: Máme $[\vec{x}_1, \vec{x}_2] = \mathbb{R}^2$. Rovnako $[\vec{y}_1, \vec{x}_1] = \mathbb{R}^2$, lebo pre $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$ $\exists\, \alpha_1, \alpha_2$ také, že $\vec{a} = \alpha_1\vec{y}_1 + \alpha_2\vec{x}_1$.




Obr. 2: Máme $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3] = \mathbb{R}^3 = [\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{x}_3]$.

# Dôkaz Steinitzovej vety

Dôkaz urobíme matematickou indukciou vzhľadom na $j$.

- nech $j = 1$

  Podmienka a) je splnená, lebo $1 \leq k$ pre $k \in \mathbb{N}$.

  Platí, že $\vec{y}_1 \in V = [\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k]$ a teda postupnosť $\vec{y}_1, \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k$ je lineárne závislá a zároveň $V = [\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k] = [\vec{y}_1, \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k]$. Z lineárnej závislosti vyplýva, že niektorý spomedzi $\vec{y}_1, \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k$ je lineárnou kombináciou členov pred ním. Vektor $\vec{y}_1$ to nemôže byť ($\vec{y}_1 \neq \vec{0}$) a preto je to niektorý člen $\vec{x}_t$. Z predchádzajúcich viet máme, že $V = [\vec{y}_1, \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k] = [\vec{y}_1, \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_{t-1}, \vec{x}_{t+1}, \ldots, \vec{x}_k]$.
  A teda podmienka b) je splnená, lebo k vektoru $\vec{y}_1$ sme pridali $k - 1$ vektorov spomedzi $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k$.

- indukčný predpoklad: nech pre $j = s - 1$ platia tvrdenia a) a b)

- nech $j = s$, musíme ukázať platnosť tvrdení a) a b) využitím IP.

# Dôkaz Steinitzovej vety - pokračovanie

- pre $j = s$ teda máme $s$ lin. nezávislých vektorov $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_s$, teda aj podmnožina $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_{s-1}$ sú lin. nezávislé vektory. Podľa IP vieme vybrať $k - (s-1)$ vektorov spomedzi $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ tak, že vzniknutá množina generuje celý $V$. Nech teda $V = [\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_{s-1}, \vec{x}_{i_1}, \dots, \vec{x}_{i_{k-s+1}}]$.

  časť a): Z IP máme, že $s - 1 \leq k$. Stačí, keď ukážeme, že nemôže nastať rovnosť, lebo potom už z nerovnice $s - 1 < k \Rightarrow s \leq k$. Skúmajme teda možnosť, že $s - 1 = k$. Potom máme $V = [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k] = [\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_{s-1}]$, t. j. priestor $V$ nám vygenerujú vektory $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_{s-1}$. Lenže aj $\vec{y}_s \in V$, čiže sa musí dať napísať ako lin. kombinácia vektorov $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_{s-1}$. To je ale spor, lebo vektory $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_s$ sú lin. nezávislé. Preto naozaj $s - 1 < k$ a teda $s \leq k$, čím je podmnienka a) je splnená.

  časť b): Vektor $\vec{y}_s \in V$ a teda je lin. kombináciou vektorov $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_{s-1}, \vec{x}_{i_1}, \dots, \vec{x}_{i_{k-s+1}}$. Platí, že $V = [\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_{s-1}, \vec{y}_s, \vec{x}_{i_1}, \dots, \vec{x}_{i_{k-s+1}}]$. Navyše je jasné, že postupnosť týchto vektorov je lineárne závislá a teda niektorý člen postupnosti je lin. kombináciou členov pred ním. Túto vlastnosť ale nemá žiaden z vektorov $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_{s-1}, \vec{y}_s$, lebo sú LN. Preto to bude niektorý z členov $\vec{x}_{i_1}, \dots, \vec{x}_{i_{k-s+1}}$. Jeho vynechaním zo zápisu lineárneho obalu sa nič nezmení a zvyšné vektory budú stále generovať celý priestor $V$, čím je podmienka b) je splnená.

# Súvis generovania VP a lineárnej nezávislosti vektorov

## PRÍKLADY

- Na generovanie vektorového priestoru $\mathbb{R}^2$ stačia dva lineárne nezávislé vektory, napríklad $(1,0),(0,1)$. Zo Steinitzovej vety teda hneď vieme, že každé tri vektory v $\mathbb{R}^2$ sú lineárne závislé.
- Podobne v $\mathbb{R}^n$ nemôže byť $n+1$ lineárne nezávislých vektorov.

# Zoznam použitých obrázkov

- obr. 1, 2: B. Pokorná