Báza a dimenzia

Lineárna algebra

Barbora Pokorná

KAG, FMFI UK

2020

Konečne generovaný vektorový priestor

DEFINÍCIA

Vektorový priestor V nad poľom R sa nazýva konečne generovaný, ak existuje konečná množina $M \subset V$ taká, že $V = [M]$.
Ak priestor V nie je konečne generovaný, povieme, že je nekonečne generovaný.

PRÍKLADY

- Vektorový priestor $\mathbb{R}^3$ je konečne generovaný.

  Generujú ho vektory $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$.

- Vektorový priestor všetkých reálnych polynómov $\mathbb{R}[t]$ je nekonečne generovaný.

  Sporom: nech $\exists\ p_1(t), p_2(t), \ldots, p_s(t) \in \mathbb{R}[t]$ také, že $[p_1(t), p_2(t), \ldots, p_s(t)] = \mathbb{R}[t]$. Nech m_i je stupeň polynómu $p_i(t)$. Zoberme polynóm $t^m \in \mathbb{R}[t]$ taký, že $m > \max\{m_1, \ldots, m_s\}$. Polynóm $t^m \notin [p_1(t), p_2(t), \ldots, p_s(t)]$ a teda $[p_1(t), p_2(t), \ldots, p_s(t)] \neq \mathbb{R}[t]$.

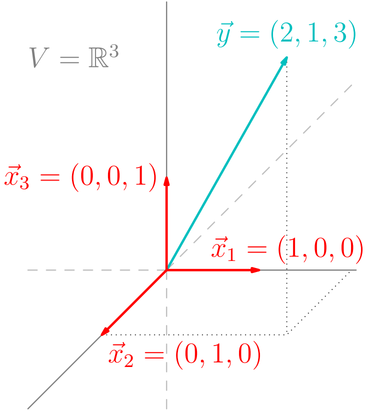
Báza vektorového priestoru

Vieme, že lineárny obal konečnej množiny vektorov sa nedá zjednodušiť (vynechaním zbytočných vektorov) práve vtedy, keď tá množina je lineárne nezávislá.

DEFINÍCIA

Nech V je konečne generovaný vektorový priestor. Ak pre nejaké $n \in \mathbb{N}$ voľaktorá n-členná postupnosť $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ vo V je lineárne nezávislá a zároveň taká, že $[\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n] = V$, tak postupnosť $\langle \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n \rangle$ sa nazýva báza priestoru V a tieto vektory voláme bázové vektory.

Ako uvidíme neskôr, báza je naozaj základňou VP v tom zmysle, že každý vektor VP sa dá jediným spôsobom vyjadriť ako lineárna kombinácia bázových vektorov.



Obr. 1: Báza vo V.

Existencia bázy

VETA

Nulový vektorový priestor nemá bázu.

Každý nenulový konečne generovaný vektorový priestor má aspoň jednu bázu.

DÔKAZ

- pre $V = \{\vec{0}\}$ máme iba $V = [\vec{0}]$. Lenže postupnosť $\vec{x}_1 = \vec{0}$ je lineárne závislá.
- ak V je nenulový konečne generovaný, tak existuje konečná množina vektorov $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n\} \subset V$ taká, že $V = [\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n]$. Postupným vynechávaním tých vektorov, ktoré sú lineárnou kombináciou ostatných dostaneme podmnožinu $\{\vec{x}_{i_1}, \ldots, \vec{x}_{i_k}\} \subset \{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n\}$, ktorá je lineárne nezávislá a pritom ešte stále generuje celý priestor V.

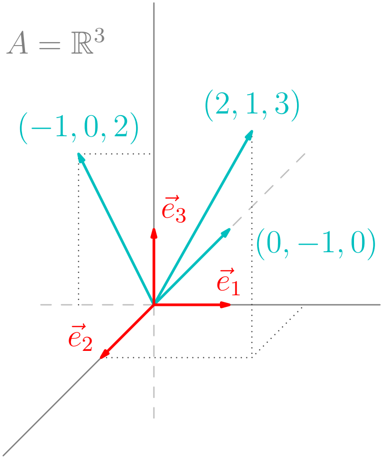
Voľne by sme mohli povedať, že báza konečne generovaného priestoru je „najchudobnejšia“ množina vektorov, generujúca celý tento priestor.

- Nájdite bázu podpriestoru
  $A = [(-1,0,2),(2,1,3),(0,-1,0)]$.

  Najskôr sa pozrieme, či sú uvedené generátory lineárne závislé, t. j. pre aké $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ je
  $\alpha_1(-1,0,2) + \alpha_2(2,1,3) + \alpha_3(0,-1,0) = (0,0,0)$.
  Vypočítame, že $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ a teda generátory sú lineárne nezávislé.

  Čiže tvoria bázu $\langle(-1,0,2),(2,1,3),(0,-1,0)\rangle$ podpriestoru A.

  Samozrejme to nie je jediná báza podpriestoru A. Bázou je napr. aj trojica vektorov
  $\langle(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\rangle$.



Obr. 2: Dve bázy v A.

Štandardná báza

DEFINÍCIA

Nech R je pole a nech $n \in \mathbb{N}$. Nech vektor $\vec{e}_i \in R^n$ je taký, že $\vec{e}_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ má i-tu zložku 1 a ostatné zložky 0. Báza $\langle \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n \rangle$ vektorového priestoru R^n sa nazýva štandardná alebo aj kanonická báza.

PRÍKLAD

Nech $R = \mathbb{R}$ a $n = 5$. Štandardná báza vektorového priestoru $\mathbb{R}^5$ je

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= (1, 0, 0, 0, 0), \\ \vec{e}_2 &= (0, 1, 0, 0, 0), \\ \vec{e}_3 &= (0, 0, 1, 0, 0), \\ \vec{e}_4 &= (0, 0, 0, 1, 0), \\ \vec{e}_5 &= (0, 0, 0, 0, 1). \end{aligned}$$

Počet prvkov bázy

VETA

Všetky bázy konečne generovaného nenulového vektorového priestoru majú rovnaký počet prvkov.

DÔKAZ

- nech $\langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \rangle$ a $\langle \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_r \rangle$ sú dve bázy priestoru V
- z definície bázy máme, že $V = [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n]$ a pre lineárne nezávislú množinu vektorov $\{\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_r\} \subset V$ podľa Steinitzovej vety platí, že $r \leq n$
- lenže zároveň pre druhú bázu $V = [\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_r]$ a pre lineárne nezávislú množinu vektorov $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\} \subset V$ podľa Steinitzovej vety platí, že $n \leq r$
- a preto $n = r$

Dimenzia (rozmer) vektorového priestoru

DEFINÍCIA

Nech V je nenulový konečne generovaný vektorový priestor nad poľom R. Potom počet prvkov (hociktorej) jeho bázy sa nazýva dimenzia priestoru V. Toto číslo označíme $\dim_R(V)$, príp. $\dim(V)$ ak je jasné, o ktoré pole R ide.
Dimenzia nulového vektorového priesotru $V = \{\vec{0}\}$ je rovná 0.
Konečne generované VP voláme aj konečnorozmerné alebo konečnodimenzionálne.
Ak $\dim(V) = k$, tak hovoríme, že V je k-rozmerný vektorový priestor.

PRÍKLAD

- pre každé pole R máme $\dim_R(R^n) = n$
- z definície $\dim(\{\vec{0}\}) = 0$
- nech $\mathbb{R}_3[t]$ je množina polynómov stupňa nanajvýš 2 nad poľom $\mathbb{R}$, pričom máme def.

  $(P + Q)(x) = P(x) + Q(x)$ pre $P(x), Q(x) \in \mathbb{R}_3[t]$

  $(\alpha P)(x) = \alpha.P(x)$ pre $P(x) \in \mathbb{R}_3[t]$ a $\alpha \in \mathbb{R}$

  Je to vektorový priestor a $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_3[t]) = 3$. Báza tohoto priestoru je napr. $\langle 1, t, t^2 \rangle$.

Doplnenie na bázu priestoru

VETA

Nech V je nenulový n-rozmerný vektorový priestor a nech $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_k$ pre $k \in \mathbb{N}$ je nejaká lineárne nezávislá postupnosť vo V. Potom $k \leq n$ a existuje $n-k$ vektorov $\vec{w}_{k+1}, \ldots, \vec{w}_n$ z V takých, že $\langle \vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_k, \vec{w}_{k+1}, \ldots, \vec{w}_n \rangle$ je báza priestoru V.

DÔKAZ

- keďže $\dim(V) = n$, vo V existuje n-prvková báza, napr. $\langle \vec{z}_1, \ldots, \vec{z}_n \rangle$, čiže $V = [\vec{z}_1, \ldots, \vec{z}_n]$
- pre LN množinu $\{\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_k\}$ máme zo Steinitzovej vety (časť a), že $k \leq n$
- zo Steinitzovej vety (časť b) vieme, že spomedzi vektorov $\vec{z}_1, \ldots, \vec{z}_n$ môžeme vybrať $n-k$ vektorov (označme ich $\vec{w}_{k+1}, \ldots, \vec{w}_n$) tak, že vzniknutá množina $\{\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_k, \vec{w}_{k+1}, \ldots, \vec{w}_n\}$ tiež generuje celý priestor V
- táto množina je navyše lineárne nezávislá. Ukážeme sporom. Keby bola LZ, mohli by sme postupne vynechávať vektory, ktoré sú LK ostatných, ale zvyšok by stále generoval celý priestor V. A tým by sme dostali bázu priestoru V, ktorá má menej ako n prvkov. A to je spor s tým, že $\dim(V) = n$.
- záver: postupnosť $\langle \vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_k, \vec{w}_{k+1}, \ldots, \vec{w}_n \rangle$ (zapísaná v akomkoľvek poradí) tvorí bázu vo V

Vlastnosti bázových vektorov

VETA

Ak $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ pre $n \in \mathbb{N}$ je n-členná postupnosť vektorov n-rozmerného VP V nad poľom R, tak

a) postupnosť $\langle \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n \rangle$ je báza vo V práve vtedy, keď je lineárne nezávislá,

b) $\langle \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n \rangle$ je báza vo V práve vtedy, keď $[\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n] = V$.

DÔKAZ

časť a) „$\Rightarrow$“: platí z definície bázy

„$\Leftarrow$“: ak sú vektory $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ LN, tak sa podľa predošlej vety dajú doplniť $n - n = 0$ vektormi na bázu priestoru V. Čiže $\langle \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n \rangle$ je báza vo V.

časť b) „$\Rightarrow$“: platí z definície bázy

„$\Leftarrow$“: ak vektory $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ generujú celý V, tak nemôžu byť LZ. Sporom: Ak by boli, tak postupným vynechávaním tých, ktoré sú LK ostatných, by sme dostali bázu, ktorá má menej ako n prvkov. A to by bol spor s $\dim(V) = n$. Čiže sú LN a $\langle \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n \rangle$ je báza vo V.

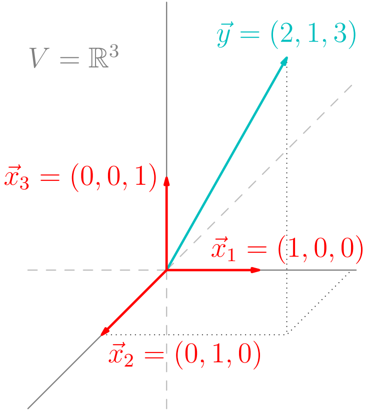
Poznámka: Ak vieme, že daný priestor má dimenziu n, tak pri overovaní, či je nejaká n-členná vektorová postupnosť bázou stačí overiť iba to, či je LN alebo iba to, či jej členy generujú celý VP.

Jednoznačnosť súradníc vektora vzhľadom na bázu

VETA A DEFINÍCIA

Nech V je VP nad poľom R. Potom n-členná postupnosť $\langle \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n \rangle$ vektorov z V je báza priestoru V práve vtedy, keď každý vektor z V sa dá jediným spôsobom vyjadriť ako lineárna kombinácia postupnosti $\langle \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n \rangle$.

Ak $\langle \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n \rangle$ je báza vo V a vektor $\vec{y} \in V$ má vyjadrenie $\vec{y} = \beta_1 \vec{x}_1 + \cdots + \beta_n \vec{x}_n$, tak usporiadanú n-ticu $(\beta_1, \ldots, \beta_n) \in R^n$ nazývame súradnicovou n-ticou vektora $\vec{y}$ vzhľadom na bázu $\langle \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n \rangle$. Skalár β_i nazývame i-tou súradnicou vektora $\vec{y}$ vzhľadom na bázu $\langle \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n \rangle$.



Obr. 3: Súradnice vektora $\vec{y} \in V$ sú $\beta_1 = 2, \beta_2 = 1, \beta_3 = 3$ vzhľadom na bázu $\langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3 \rangle$.

Dôkaz jednoznačnosti súradníc

DÔKAZ

- „$\Rightarrow$“: nech $\langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \rangle$ je báza vo V. Keďže $[\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n] = V$, tak každý $\vec{y} \in V$ sa dá vyjadriť ako $\vec{y} = \beta_1 \vec{x}_1 + \dots + \beta_n \vec{x}_n$ pre nejakú postupnosť $(\beta_1, \dots, \beta_n)$.
  Máme ešte ukázať, že to je jediné možné vyjadrenie.
  Nech by $\exists\, \gamma_1, \dots, \gamma_n$ také, že $\vec{y} = \gamma_1 \vec{x}_1 + \dots + \gamma_n \vec{x}_n$.
  Potom $\beta_1 \vec{x}_1 + \dots + \beta_n \vec{x}_n = \gamma_1 \vec{x}_1 + \dots + \gamma_n \vec{x}_n$.
  Odtiaľ $(\beta_1 - \gamma_1)\vec{x}_1 + \dots + (\beta_n - \gamma_n)\vec{x}_n = \vec{0}$.
  Keďže $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ sú LN, tak LK nulového vektora je triviálna a teda $\beta_1 = \gamma_1, \dots, \beta_n = \gamma_n$.
- „$\Leftarrow$“: nech každý vektor z V sa dá jediným spôsobom vyjadriť ako LK postupnosti $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$.
  Z toho je jasné, že $[\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n] = V$.
  Ešte ukážeme, že sú LN. Keďže $\vec{0} \in V$, tak aj preň musia existovať $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ také, že $\alpha_1 \vec{x}_1 + \dots + \alpha_n \vec{x}_n = \vec{0}$. Zároveň však $0\vec{x}_1 + \dots + 0\vec{x}_n = \vec{0}$. A keďže má existovať jednoznačné vyjadrenie LK, tak musí byť $\alpha_1 = 0, \dots, \alpha_n = 0$. A teda vektory $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ sú lin. nezávislé.
  Záver: $\langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \rangle$ je báza vo V.

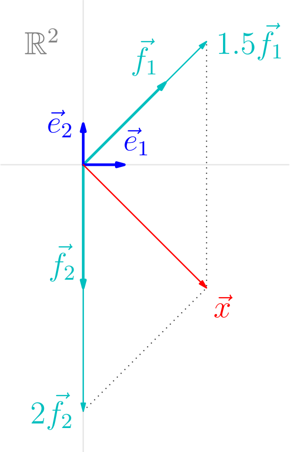
Príklady

- Uvažujme $V = \mathbb{R}^3$ a jeho štandardnú bázu $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle$.
  Potom vektor $\vec{a} = 2\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2 + 9\vec{e}_3$ má usporiadanú trojicu súradníc $(2, -4, 9)$ vzhľadom na túto bázu.
  Ak by sme vo V pracovali s bázou $\langle \vec{e}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_3 \rangle$, tak súradnice vektora $\vec{a}$ budú $(-4, 2, 9)$.

- Uvažujme $V = \mathbb{R}^2$ a jeho dve bázy (obr. 4).
  Prvú štandardnú bázu $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle$ a druhú $\langle \vec{f}_1, \vec{f}_2 \rangle$, kde vektory $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ majú súradnice $\vec{f}_1 = (2, 2)$ a $\vec{f}_2 = (0, -3)$ vzhľadom na štandardnú bázu.

  Potom vektor $\vec{x} \in V$, ktorý má v prvej báze súradnice $(3, -3)_{\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle}$, má v druhej báze súradnice $(1.5, 2)_{\langle \vec{f}_1, \vec{f}_2 \rangle}$.

  Overenie: $\vec{x} = 3(1, 0) - 3(0, 1) = 1.5(2, 2) + 2(0, -3)$



Obr. 4: $\vec{x} = (1.5, 2)_{\langle \vec{f}_1, \vec{f}_2 \rangle}$

Zoznam použitých obrázkov

- obr. 1 – 4: B. Pokorná