Matice

Lineárna algebra

Barbora Pokorná

KAG, FMFI UK

2020

Matica

DEFINÍCIA

Maticou typu $m \times n$ nad poľom R nazývame ľubovoľnú tabuľku pozostávajúcu z prvkov poľa R, ktorá má m riadkov a n stĺpcov. Množinu všetkých matíc typu $m \times n$ nad poľom R ozn. $M_{m,n}(R)$.

- označenie: $A, B, X, \ldots$
- zápis: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$
- a_{ij} označuje prvok v i-tom riadku a j-tom stĺpci
- stručnejší zápis: $A = (a_{ij})_{m,n}$
- **nulová matica** má všetky prvky nulové

PRÍKLAD

$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ je matica typu 2×3 nad $\mathbb{R}$.

Operácie s maticami

DEFINÍCIA

Nech A, B sú matice typu $m \times n$ nad poľom R a $c \in R$.

1. Súčet matíc $A = (a_{ij})_{m,n}$ a $B = (b_{ij})_{m,n}$ je matica $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m,n}$.
2. Matica $c.A = (ca_{ij})_{m,n}$ sa nazýva c-násobok matice A.

Poznámka: Teda sčitovanie matíc a násobenie matice skalárom definujeme po súradniciach.
Všimnime si, že súčet matíc definujeme len pre matice rovnakého typu.

PRÍKLAD

Uvažujme matice typu 2×2 nad $\mathbb{R}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$2.\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Vektorový priestor $M_{m,n}(R)$

VETA

Množina $M_{m,n}(R)$ s operáciou sčitovania matíc a so zobrazením $R \times M_{m,n}(R) \to M_{m,n}(R)$, kde $(c, A) \mapsto cA$, je vektorový priestor nad poľom R. Jeho dimenzia je mn.

DÔKAZ

V rámci cvičení.

- neutrálny prvok operácie $+$: nulová matica
- opačný prvok k matici $A = (a_{ij})_{m,n}$ je: $-A = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \dots & -a_{mn} \end{pmatrix}$

Štvorcové matice

DEFINÍCIA

Matice typu $n \times n$ sa nazývajú štvorcové matice stupňa n.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- prvky hlavnej diagonály: $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$
- hlavná diagonála je myslená spojnica prvkov hlavnej diagonály
- prvky vedľajšej diagonály: $a_{1n}, \dots, a_{n1}$

Matica D je diagonálna, ak všetky jej prvky neležiace na hlavnej diagonále sú nulové. Diagonálna matica, ktorá má na hlavnej diagonále samé jednotky, je jednotková matica, ozn. I_n.

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad I = I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Transponovaná matica

DEFINÍCIA

Transponovaná matica k matici $A = (a_{ij})_{m,n}$ je matica $A^T = (a_{ji})_{m,n}$.
Štvorcová matica A sa nazýva symetrická, ak $A = A^T$ a antisymetrická, ak $A = -A^T$.

Poznámka: A^T je vlastne matica A prevrátená symetricky podľa hlavnej diagonály. Platí:

- $I^T = I$
- $(A^T)^T = A$
- $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $(cA)^T = cA^T$

PRÍKLAD

Ak $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, tak jej transponovaná matica je $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Matice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sú symetrické, matice $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ sú antisymetrické.

Vektorové podpriestory vo VP $M_{n,n}(R)$

VETA

Nasledujúce množiny tvoria vektorové podpriestory vo vektorovom priestore $M_{n,n}(R)$

- množina všetkých symetrických matíc typu $n \times n$,
- množina všetkých antisymetrických matíc typu $n \times n$,
- množina všetkých diagonálnych matíc typu $n \times n$.

DÔKAZ

V rámci trénovacích úloh.

DEFINÍCIA

Matica $A = (a_{ij})_{m,n}$ nad poľom R sa rovná matici $B = (b_{ij})_{r,s}$ nad tým istým poľom, ak $m = r$ a $n = s$ a pre všetky $i = 1, \ldots, m$ a $j = 1, \ldots n$ máme $a_{ij} = b_{ij}$.

Podpriestor prislúchajúci matici

DEFINÍCIA

Ak $A = (a_{ij})_{m,n}$ je matica nad poľom R, tak S_A označíme najmenší vektorový podpriestor v R^n obsahujúci riadky matice A, chápané ako prvky R^n. Teda

$$S_A = [(a_{11}, \ldots, a_{1n}), \ldots, (a_{i1}, \ldots, a_{in}), \ldots, (a_{m1}, \ldots, a_{mn})].$$

O S_A hovoríme ako o VPP v R^n patriacom k matici A.

PRÍKLADY

Nad poľom $\mathbb{R}$ máme

$$A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) \qquad V_A = [(1,0,1),(0,1,1)]$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad V_I = [(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)] = \mathbb{R}^3$$

Poznámka: Je jasné, že matici priradíme prislúchajúci VPP jednoznačne. Avšak jeden VPP môže reprezentovať viacero matíc. Napríklad matice určené jeho rôznymi bázami.

Elementárne riadkové operácie

DEFINÍCIA

Elementárne riadkové operácie na matici A nad poľom R sú:

1. vzájomná výmena dvoch riadkov matice
2. vynásobenie niektorého riadku matice nenulovým prvkom c poľa R
3. pripočítanie ľubovoľného násobku niektorého riadku k inému riadku

Hovoríme, že matice A a B sú riadkovo ekvivalentné ak maticu B možno z A dostať pomocou konečnej postupnosti elementárnych riadkových operácií. Ak matice A a B sú riadkovo ekvivalentné, zapisujeme to ako $A \sim B$.

Príklad úpravy matice pomocou ERO

Nasledujúce matice sme dostali z prvej pomocou elementárnych riadkových operácií.
Sú to teda riadkovo ekvivalentné matice.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \overset{(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -6 & -9 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \overset{(2)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -6 & -9 \\ 0 & -8 & -12 \end{pmatrix} \overset{(3)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \overset{(4)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{(5)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{(6)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Elementárne riadkové operácie, ktoré sme použili sú:

(1) k 2.riadku sme pripočítali (-2)-násobok prvého (inak povedané odčítali sme dvojnásobok)

(2) od 3.riadku sme odčítali 3-násobok prvého

(3) 2.riadok sme vynásobili $-\frac{1}{3}$, 3.riadok sme vynásobili $-\frac{1}{4}$

(4) od 2.riadku sme odpočítali tretí

(5) od prvého riadku sme odpočítali druhý

(6) druhý riadok sme vynásobili $\frac{1}{2}$ (čiže sme vlastne ho vydelili 2)

Riadková ekvivalencia matíc je reláciou ekvivalencie

VETA

Riadková ekvivalencia matíc (relácia „$\sim$“) daného typu nad daným poľom R je reláciou ekvivalencie, t. j. je

a) symetrická: $A \sim A$ pre $\forall A \in M_{m,n}(R)$

b) reflexívna: $A \sim B \Rightarrow B \sim A$ pre $\forall A, B \in M_{m,n}(R)$

c) tranzitívna: $A \sim B \wedge B \sim C \Rightarrow A \sim C$ pre $\forall A, B, C \in M_{m,n}(R)$

DÔKAZ

a) na A urobíme jednu z ERO a potom k nej opačnú ERO a dostaneme opäť A

b) nech $A \sim B$. To znamená, že vieme urobiť k ERO tak, že $A \overset{(1)}{\sim} A_1 \overset{(2)}{\sim} \dots \overset{(k-1)}{\sim} A_{k-1} \overset{(k)}{\sim} A_k = B$. Tieto operácie vieme robiť aj opačne $B \overset{(k)^{op}}{\sim} A_{k-1} \overset{(k-1)^{op}}{\sim} \dots \overset{(1)^{op}}{\sim} A$. Teda aj $B \sim A$.

c) nech $A \sim B \wedge B \sim C$. Čiže $A \sim A_1 \sim \cdots \sim A_{k-1} \sim A_k = B \sim B_1 \sim \cdots \sim B_l = C$. Teda aj $A \sim C$ po $(k + l)$ ERO.

Ekvivalentné matice určujú rovnaké VPP

VETA

Nech $A = (a_{ij})_{m,n}$ a $B = (b_{ij})_{m,n}$ sú riadkovo ekvivalentné nad poľom R. Potom $S_A = S_B$.

DÔKAZ

- ozn. $\vec{x}_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in})$ vektor v R^n určený i-tym riadkom matice A. Teda $S_A = [\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m]$.
- stačí ukázať, že ak C vznikne z A vykonaním jednej ERO, tak $S_C = S_A$ (potom je jasné, že aj konečný počet ERO zachová prislúchajúci VPP). Máme 3 možnosti:

1. matica C vznikla z A výmenou i-teho a j-teho riadka (nech $i < j$)
   Teda ak $S_A = [\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_i, \ldots, \vec{x}_j, \ldots, \vec{x}_m]$, tak $S_C = [\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_j, \ldots, \vec{x}_i, \ldots, \vec{x}_m]$.
   Zrejme $S_A = S_C$.
2. matica C vznikla z A vynásobením i-teho riadka prvkom $\alpha \in R \setminus \{0\}$
   Teda ak $S_A = [\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_i, \ldots, \vec{x}_m]$, tak $S_C = [\vec{x}_1, \ldots, \alpha\vec{x}_i, \ldots, \vec{x}_m]$.
   Platí $S_A \subset S_C$, lebo pre vektor $\vec{y} \in S_A$ je $\vec{y} = \beta_1\vec{x}_1 + \cdots + \beta_i\vec{x}_i + \cdots + \beta_m\vec{x}_m$ a to je to isté ako $\vec{y} = \beta_1\vec{x}_1 + \cdots + (\beta_i\alpha^{-1})(\alpha\vec{x}_i) + \cdots + \beta_m\vec{x}_m$, čiže $\vec{y} \in S_C$.

Pokračovanie dôkazu

2. pokračovanie:
   Platí aj $S_C \subset S_A$, lebo pre vektor $\vec{y} \in S_C$ je $\vec{y} = \gamma_1\vec{x}_1 + \cdots + \gamma_i(\alpha\vec{x}_i) + \cdots + \gamma_m\vec{x}_m$ a to je to isté ako $\vec{y} = \gamma_1\vec{x}_1 + \cdots + (\gamma_i\alpha)\vec{x}_i + \cdots + \gamma_m\vec{x}_m$, čiže $\vec{y} \in S_A$.
   Teda $S_A = S_C$.
3. matica C vznikla z A pripočítaním α-násobku j-teho riadka k i-temu riadku
   Z možnosti 1 už vieme, že vzájomná výmena riadkov nemá vplyv na podpriestor generovaný riadkami matice. Teda môžeme predpokladať, že $i = 1$ a $j = 2$.
   Teda ak $S_A = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_m]$, tak $S_C = [\vec{x}_1 + \alpha\vec{x}_2, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_m]$.

   Platí $S_A \subset S_C$, lebo pre vektor $\vec{y} \in S_A$ je $\vec{y} = \beta_1\vec{x}_1 + \beta_2\vec{x}_2 + \cdots + \beta_m\vec{x}_m$ a to je to isté ako $\vec{y} = \beta_1(\vec{x}_1 + \alpha\vec{x}_2) + (\beta_2 - \beta_1\alpha)\vec{x}_2 + \cdots + \beta_m\vec{x}_m$, čiže $\vec{y} \in S_C$.

   Platí aj $S_C \subset S_A$, lebo pre vektor $\vec{y} \in S_C$ je $\vec{y} = \gamma_1(\vec{x}_1 + \alpha\vec{x}_2) + \gamma_2\vec{x}_2 + \cdots + \gamma_m\vec{x}_m$ a to je to isté ako $\vec{y} = \gamma_1\vec{x}_1 + (\gamma_1\alpha + \gamma_2)\vec{x}_2 + \cdots + \gamma_m\vec{x}_m$, čiže $\vec{y} \in S_A$.
   Teda $S_A = S_C$.

Redukovaná stupňovitá matica

DEFINÍCIA

Vedúci prvok nenulového riadku matice nazývame prvý nenulový prvok (zľava) riadku matice.

DEFINÍCIA

Matica $A = (a_{ij})_{m,n}$ je v redukovanom stupňovitom tvare, ak spĺňa nasledujúce štyri podmienky

1. vedúci prvok každého nenulového riadku je 1
2. každý stĺpec obsahujúci vedúci prvok niektorého riadku má prvky v ostatných riadkoch nulové
3. nulové riadky ležia pod nenulovými riadkami
4. ak a_{ij} a a_{st} sú vedúce prvky riadkov matice A a $i < s$, tak musí byť $j < t$ (t.j. vedúce riadky sú usporiadané zľava doprava)

Ak matica spĺňa iba podmienky 3 a 4, hovoríme, že je v stupňovitom tvare.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \boxed{1} & * & 0 & * & 0 & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & * & 0 & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Úprava matice na redukovaný stupňovitý tvar

PRÍKLAD

Maticu $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ upravte na redukovaný stupňovitý tvar.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \overset{\texttt{1.r}\leftrightarrow\texttt{2.r}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \overset{\texttt{2.r+=(-2)*1.r}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \overset{\texttt{3.r+=(-4)*1.r}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & -4 \end{pmatrix} \overset{\texttt{3.r*=1/10}}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2/5 \end{pmatrix} \overset{\texttt{2.r+=(-4)*3.r}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 13/5 \\ 0 & 0 & 1 & -2/5 \end{pmatrix} \overset{\texttt{1.r+=2*3.r}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 & 13/5 \\ 0 & 0 & 1 & -2/5 \end{pmatrix}$$

VETA

Každá matica je riadkovo ekvivalentná s redukovanou stupňovitou maticou.

DÔKAZ

Postup je naznačený v predchádzajúcom príklade.

Hodnosť matice

VETA

Nenulové riadky stupňovitej matice $A = (a_{ij})_{m,n} \in M_{m,n}(R)$, chápané ako vektory, sú lineárne nezávislé a teda tvoria bázu v S_A.

Poznámka: Teda aj nenulové riadky redukovanej stupňovitej matice sú lineárne nezávislé.

DEFINÍCIA

Majme maticu $A \in M_{m,n}(R)$. Dimenzia podpriestoru $S_A \subset R^n$, t. j. číslo $\dim(S_A)$, sa nazýva hodnosť matice A. Označujeme ho $h(A)$.

VETA

Hodnosť matice je počet nenulových riadkov stupňovitej matice, s ktorou je táto matica riadkovo ekvivalentná.

PRÍKLAD: matica A, ktorá má hodnosť $h(A) = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 10 \end{pmatrix} \overset{\texttt{2.r+=(-2)*1.r}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 7 \\ 4 & 2 & 10 \end{pmatrix} \overset{\texttt{3.r+=(-4)*1.r}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & -2 & 14 \end{pmatrix} \overset{\texttt{3.r+=(-2)*2.r}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matice reprezentujúce vektorový priestor

VETA

Nech $A = (a_{ij})_{m,n}, B = (b_{ij})_{m,n}$ sú RSM nad poľom R také, že $S_A = S_B$. Potom $A = B$.

DÔSLEDOK

Každá matica je riadkovo ekvivalentná len s jedinou redukovanou stupňovitou maticou.

DÔKAZ

- nech A je ľubovoľná matica
- určite existuje RSM A' taká, že $A \sim A'$ a teda $S_A = S_{A'}$
- nech by existovala aj RSM A'' taká, že $A \sim A''$ a teda $S_A = S_{A''}$
- potom ale $S_{A'} = S_{A''}$ a keďže A', A'' sú obe RSM, tak podľa predchádzajúcej vety $A' = A''$

Zhrnutie

VETA: Nech A a B sú matice typu $m \times n$ nad poľom R. Nasledovné podmienky sú ekvivalentné:

1. A a B sú riadkovo ekvivalentné
2. $S_A = S_B$
3. A a B sú riadkovo ekvivalentné s tou istou redukovanou stupňovitou maticou.

DÔKAZ

- „1 $\Rightarrow$ 2“: veta vyššie
- „1 $\Leftarrow$ 2“: nech $S_A = S_B$. Vieme, že existuje jediná RSM A' taká, že $A \sim A'$ a zároveň existuje jediná RSM B' taká, že $B \sim B'$. Čiže $S_A = S_{A'}$ a $S_B = S_{B'}$. Využijúc predpoklad, teda aj $S_{A'} = S_{B'}$. Lenže A', B' sú RSM, takže $A' = B'$. Z toho $A \sim A' = B' \sim B$ a teda $A \sim B$.
- „1 $\Rightarrow$ 3“: nech $A \sim B$. Vieme, že existuje jediná RSM A' taká, že $A \sim A'$ a zároveň existuje jediná RSM B' taká, že $B \sim B'$. Potom máme $A' \sim A \sim B \sim B'$, čiže $A' \sim B'$ a $S_{A'} = S_{B'}$. Keďže sú obe RSM, tak $A' = B'$.
- „1 $\Leftarrow$ 3“: nech existuje RSM A' taká, že $A \sim A'$ aj $B \sim A'$. Potom $A \sim A' \sim B$, teda $A \sim B$.

Príklad 1

Nájdite bázu daného podpriestoru a určite jeho dimenziu, ak
$S = [(1,1,0,-1),(0,1,2,1),(1,0,1,-1),(1,1,-6,-3),(-1,-5,1,0)]$ v $\mathbb{R}^4$.

RIEŠENIE

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -6 & -3 \\ -1 & -5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -6 & -3 \\ -1 & -5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & -2 \\ 0 & -5 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -9 & -3 \\ 0 & 0 & 12 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad h(M) = \dim(S) = 3$$

A teda báza v S je $\langle (1,0,0,-\frac{4}{3}),(0,1,0,\frac{1}{3}),(0,0,1,\frac{1}{3}) \rangle$.

Príklad 2

Zistite, či lineárny súčet $S+T$ podpriestorov S a T v $\mathbb{R}^4$ je direktným súčtom, ak
$S = [(0,3,0,2),(4,-2,0,0)]$ a $T = [(-5,0,-3,0),(0,0,1,-4)]$.

RIEŠENIE

Zistíme dimenziu priestoru $S+T = [(0,3,0,2),(4,-2,0,0),(-5,0,-3,0),(0,0,1,-4)]$.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -5 & 0 & -3 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/5 & 0 \\ 0 & -2 & -12/5 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/5 & 0 \\ 0 & 1 & 6/5 & 0 \\ 0 & 0 & -18/5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/5 & 0 \\ 0 & 1 & 6/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -18/5 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 12/5 \\ 0 & 1 & 0 & 24/5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -62/5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad h(M) = \dim(S+T) = 4$$

Keďže $\dim(S) = 2$ aj $\dim(T) = 2$, tak $\dim(S+T) = \dim(S) + \dim(T)$.
A teda $S+T = S \oplus T = \mathbb{R}^4$.