Lineárne zobrazenia

Lineárna algebra

Barbora Pokorná

KAG, FMFI UK

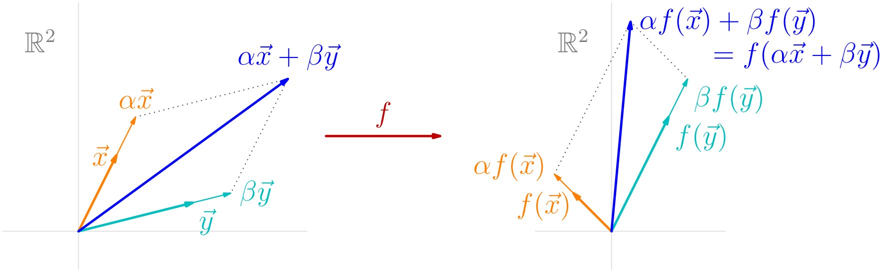
2020

Lineárne zobrazenia

- zobrazenia, ktoré rešpektujú štruktúru vektorového priestoru
- čiže rešpektujú grupovú štruktúru V a násobenie vektorov skalármi

DEFINÍCIA

Nech V a W sú vektorové priestory nad tým istým poľom R. Zobrazenie $f\colon V \to W$ sa nazýva lineárne, ak $f(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \alpha f(\vec{x}) + \beta f(\vec{y})$ pre $\forall \alpha, \beta \in R$ a $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V$.



Obr. 1: Lineárne zobrazenie f.

Lineárne zobrazenie

TVRDENIE

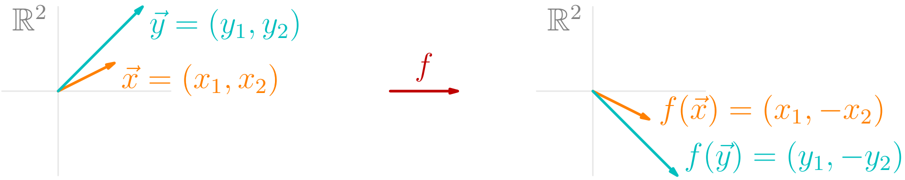
Podmienka lineárnosti zobrazenia $f\colon V \to W$ je ekvivalentná s nasledujúcou dvojicou podmienok:

1. $f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$ pre $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V$
2. $f(\alpha \vec{x}) = \alpha f(\vec{x})$ pre $\forall \alpha \in R$ a $\forall \vec{x} \in V$

PRÍKLAD: Zobrazenie $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (x_1, -x_2)$ je lineárne.

Overenie:

$$
\begin{aligned}
f(\vec{x} + \vec{y}) &= f((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) = f(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = (x_1 + y_1, -(x_2 + y_2)) \\
&= (x_1, -x_2) + (y_1, -y_2) = f(\vec{x}) + f(\vec{y}) \\
f(\alpha \vec{x}) &= f(\alpha(x_1, x_2)) = f(\alpha x_1, \alpha x_2) = (\alpha x_1, -\alpha x_2) = \alpha(x_1, -x_2) = \alpha f(\vec{x})
\end{aligned}
$$



Príklady

Príklady lineárnych zobrazení:

- nulové zobrazenie $O\colon V \to W$, $O(\vec{x}) = \vec{0}$ pre ľubovoľné dva VP V, W
- identické zobrazenie $\mathtt{id}_V\colon V \to V$ pre každý VP V
- projekcia (alebo premietanie) vektorov z R^n na ich k-tu zložku
  $p_k\colon R^n \to R$, $p_k(x_1, \ldots, x_n) = x_k$

  overenie lineárnosti:

  $$\begin{aligned} p_k(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) &= p_k(\alpha(x_1, \ldots, x_n) + \beta(y_1, \ldots, y_n)) = p_k((\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n) + (\beta y_1, \ldots, \beta y_n)) \\ &= p_k(\alpha x_1 + \beta y_1, \ldots, \alpha x_k + \beta y_k, \ldots, \alpha x_n + \beta y_n) = \alpha x_k + \beta y_k \end{aligned}$$

  $$\alpha p_k(\vec{x}) + \beta p_k(\vec{y}) = \alpha p_k(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n) + \beta p_k(y_1, \ldots, y_k, \ldots, y_n) = \alpha x_k + \beta y_k$$

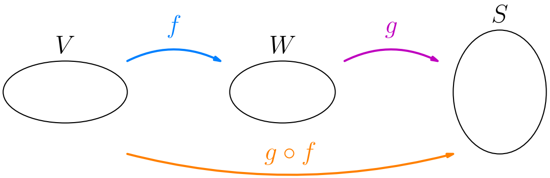
Zloženie lineárnych zobrazení

VETA

Ak $f\colon V \to W$, $g\colon W \to S$ sú lineárne zobrazenia medzi vektorovými priestormi nad poľom R, tak aj zložené zobrazenie $g \circ f\colon V \to S$ je lineárne.

DÔKAZ

- nech $\vec{x}, \vec{y} \in V$ a $\alpha, \beta \in R$, overíme podmienku lineárnosti
- $$\begin{aligned}(g \circ f)(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) &= g(f(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y})) = g(\alpha f(\vec{x}) + \beta f(\vec{y})) = \alpha g(f(\vec{x})) + \beta g(f(\vec{y})) \\ &= \alpha(g \circ f)(\vec{x}) + \beta(g \circ f)(\vec{y})\end{aligned}$$



Obr. 2: Zložením dvoch lineárnych zobrazení získame lineárne zobrazenie.

Nutná podmienka lineárneho zobrazenia

VETA

Lineárne zobrazenie zobrazuje nulový vektor na nulový vektor.

DÔKAZ

- nech f je lineárne zobrazenie
- $f(\vec{0}) = f(0\vec{x}) = 0f(\vec{x}) = \vec{0}$ pre ľubovoľný $\vec{x} \in V$

PRÍKLAD

Rozhodnite, či zobrazenie $g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2, x_3 + 5)$ je lineárne.

Overíme ako zobrazenie g zobrazuje nulový vektor: $g(0, 0, 0, 0) = (0 + 0, 0 + 5) \neq (0, 0)$.

Poznámka: Pozor, je to len nutná podmienka. Keby nám vyšiel nulový vektor, musíme overiť podmienku lineárnosti zobrazenia.

Vlastnosti lineárneho zobrazenia

VETA

Nech $f\colon\ V \to\ W$ je lineárne zobrazenie. Potom

1. $f(-\vec{x}) = -f(\vec{x}) \qquad$ pre $\forall \vec{x} \in\ V$
2. $f(\alpha_1\vec{x}_1 + \cdots + \alpha_k\vec{x}_k) = \alpha_1 f(\vec{x}_1) + \cdots + \alpha_k f(\vec{x}_k) \qquad$ pre $\forall \alpha_i \in R$ a $\forall \vec{x}_i \in\ V$ a $k \in \mathbb{N}$

DÔKAZ

1. $f(-\vec{x}) = f((-1)\vec{x}) = (-1)f(\vec{x}) = -f(\vec{x})$
2. ukážeme matematickou indukciou vzhľadom na k
   - nech $k = 1$: $\quad f(\alpha_1\vec{x}_1) = \alpha_1 f(\vec{x}_1)$
   - IP: nech pre k platí: $\quad f(\alpha_1\vec{x}_1 + \cdots + \alpha_k\vec{x}_k) = \alpha_1 f(\vec{x}_1) + \cdots + \alpha_k f(\vec{x}_k)$
   - ukážeme, že potom platí pre $k+1$:

$$f(\underbrace{\alpha_1\vec{x}_1 + \cdots + \alpha_k\vec{x}_k}_{\vec{y} \in V} + \alpha_{k+1}\vec{x}_{k+1}) = f(\vec{y} + \alpha_{k+1}\vec{x}_{k+1}) \overset{f\text{ - lin.z.}}{=} f(\vec{y}) + \alpha_{k+1} f(\vec{x}_{k+1})$$

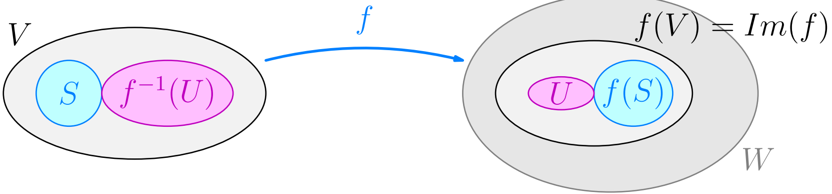
$$= f(\alpha_1\vec{x}_1 + \cdots + \alpha_k\vec{x}_k) + \alpha_{k+1} f(\vec{x}_{k+1}) \overset{\text{IP}}{=} \alpha_1 f(\vec{x}_1) + \cdots + \alpha_k f(\vec{x}_k) + \alpha_{k+1} f(\vec{x}_{k+1})$$

Obraz vektorového podpriestoru

DÔSLEDOK

Nech $f\colon\ V \to W$ je lineárne zobrazenie. Potom

1. ak $S \subset V$ je vektorový podpriestor vo V, tak aj $f(S) \subset W$ je vektorový podpriestor vo W
   ak $S = [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k]$, tak $f(S) = [f(\vec{x}_1), \dots, f(\vec{x}_k)]$
2. špeciálne: $Im(f)$ je vektorový podpriestor vo W
3. ak $U \subset W$ je vektorový podpriestor vo W, tak jeho vzor $f^{-1}(U) = \{\vec{x} \in V; f(\vec{x}) \in U\}$ je vektorový podpriestor vo V



Obr. 3: Ak S je VPP, tak aj $f(S)$ je VPP. Špeciálne, $Im(f)$ je VPP. Ak U je VPP, tak aj jeho vzor $f^{-1}(U)$ je VPP.

Lineárny izomorfizmus

VETA

Nech $f\colon V \to W$ je bijektívne lineárne zobrazenie medzi vektorovými priestormi nad poľom R.
Potom aj inverzné zobrazenie $f^{-1}\colon W \to V$ je bijektívne lineárne zobrazenie.

DEFINÍCIA

Bijektívne lineárne zobrazenie sa nazýva lineárny izomorfizmus.
Ak existuje lineárny izomorfizmus z vektorového priestoru V na priestor W, tak hovoríme, že V a W sú lineárne izomorfné (ozn. $V \cong W$).

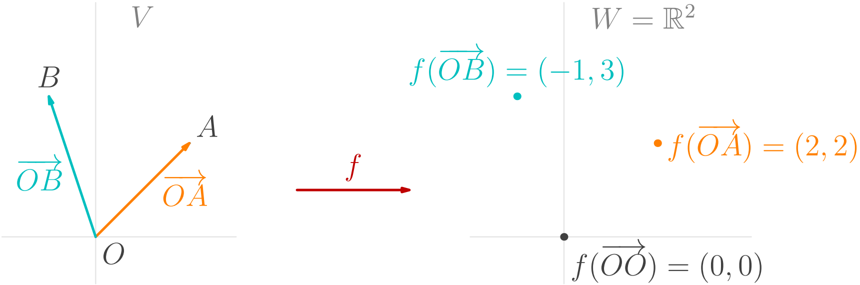
Poznámka: Relácia lineárnej izomorfnosti je relácia ekvivalencie,t. j.

- $V \cong V$ (symetrickosť)
- $V \cong W \Rightarrow W \cong V$ (reflexívnosť)
- $V \cong W \wedge W \cong S \Rightarrow V \cong S$ (tranzitívnosť)

Dôkaz v rámci trénovacích úloh.

Príklad lineárneho izomorfizmu

- $V =$ VP orientovaných úsečiek v rovine Oxy so začiatkom v bode O
- $W = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$
- $V \cong W$, lebo existuje lineárny izomorfizmus $f\colon V \to W, f(\overrightarrow{OA}) = (x_A, y_A)$



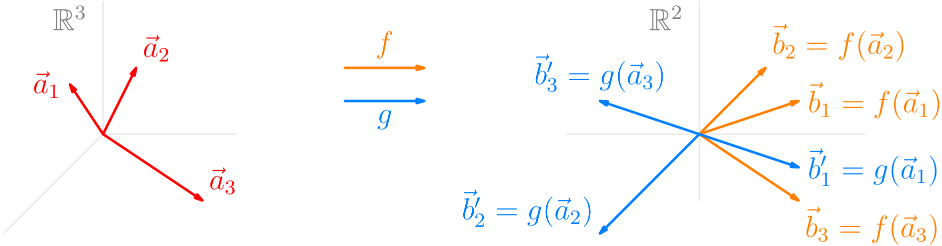
Obr. 4: Lineárny izomorfizmus priestorov V a W.

Základná veta o lineárnych zobrazeniach

VETA

Nech V a W sú vektorové priestory nad R a nech priestor V je konečne generovaný.
Ak $V = \{\vec{0}\}$, tak každé lineárne zobrazenie $V \to W$ je nulové.
Ak $V \neq \{\vec{0}\}$ a $\langle \vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m \rangle$ je báza vo V, tak pre ľubovoľné pevne zvolené $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_m \in W$ existuje práve jedno lineárne zobrazenie $f\colon V \to W$ také, že $f(\vec{a}_1) = \vec{b}_1, \ldots, f(\vec{a}_m) = \vec{b}_m$.

Každý vektor $\vec{x} \in V$ má jednoznačne určené vyjadrenie $\vec{x} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \cdots + \alpha_m \vec{a}_m$, potom jeho obraz $f(\vec{x}) = \alpha_1 \vec{b}_1 + \cdots + \alpha_m \vec{b}_m$.



Dôkaz základnej vety o lin. zobr.

DÔKAZ

Nech $V = \{\vec{0}\}$. Lineárne zobrazenie musí zobraziť nulový vektor na nulový. A keďže v priestore V je len ten jeden vektor, tak „každý“ vektor sa zobrazí na nulový vektor. Čiže lin.zobr. je nulové.

Nech $V \neq \{\vec{0}\}$ a $\langle \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m \rangle$ je báza vo V. Ukážeme, že zobrazenie f z vety:

- existuje: Predpis $\alpha_1 \vec{a}_1 + \cdots + \alpha_m \vec{a}_m \mapsto \alpha_1 \vec{b}_1 + \cdots + \alpha_m \vec{b}_m$ každému vektoru z V priradí jediný vektor z W, čiže naozaj ide o zobrazenie.
- je lineárne: Nech $\alpha, \beta \in R$ a $\vec{u}, \vec{v} \in V$. Máme jediné vyjadrenie $\vec{u}$, resp. $\vec{v}$ v tvare LK vektorov bázy, čiže $\vec{u} = \gamma_1 \vec{a}_1 + \cdots + \gamma_m \vec{a}_m$ a $\vec{v} = \delta_1 \vec{a}_1 + \cdots + \delta_m \vec{a}_m$. Potom overme podmienku:
  $$\begin{aligned} f(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) &= f(\alpha(\gamma_1 \vec{a}_1 + \cdots + \gamma_m \vec{a}_m) + \beta(\delta_1 \vec{a}_1 + \cdots + \delta_m \vec{a}_m)) \\ &= f((\alpha\gamma_1 + \beta\delta_1)\vec{a}_1 + \cdots + (\alpha\gamma_m + \beta\delta_m)\vec{a}_m) = (\alpha\gamma_1 + \beta\delta_1)\vec{b}_1 + \cdots + (\alpha\gamma_m + \beta\delta_m)\vec{b}_m \\ &= \alpha(\gamma_1 \vec{b}_1 + \cdots + \gamma_m \vec{b}_m) + \beta(\delta_1 \vec{b}_1 + \cdots + \delta_m \vec{b}_m) = \alpha f(\vec{u}) + \beta f(\vec{v}) \end{aligned}$$
- je jediné: nech by existovalo aj zobrazenie g s rovnakými vlastnosťami. Zoberme ľub. $\vec{x} \in V$, pričom $\vec{x} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \cdots + \alpha_m \vec{a}_m$ je jeho vyjadrenie v báze V. Potom $g(\vec{x}) = g(\alpha_1 \vec{a}_1 + \cdots + \alpha_m \vec{a}_m) = \alpha_1 g(\vec{a}_1) + \cdots + \alpha_m g(\vec{a}_m) = \alpha_1 \vec{b}_1 + \cdots + \alpha_m \vec{b}_m = f(\vec{x})$, čiže $g = f$.

Príklady

PRÍKLAD: Nájdite predpis lineárneho zobrazenia $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}[t]$, ak $h(1,0) = 1 + t$ a $h(0,1) = 2t^2$.

Počítajme pre $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:
$h(x, y) = h(x(1,0) + y(0,1)) = xh(1,0) + yh(0,1) = x(1 + t) + y(2t^2) = x + xt + 2yt^2$.
Čiže napr. $h(3, -2) = 3 + 3t - 4t^2$.

PRÍKLAD: Nájdite predpis lineárneho zobrazenia $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, ak zobrazuje bázové vektory nasledovne: $g(1,0,0) = (-1,2)$, $g(0,1,0) = (1,1)$, $g(0,0,1) = (2,3)$.

Počítajme pre $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} g(a, b, c) &= g(a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1)) = ag(1,0,0) + bg(0,1,0) + cg(0,0,1) \\ &= a(-1,2) + b(1,1) + c(2,3) = (-a + b + 2c, 2a + b + 3c) \end{aligned}$$

Čiže napr. $g(1, -3, 2) = (-1 - 3 + 2.2, 2.1 - 3 + 3.2) = (0, 5)$.

Matica lineárneho zobrazenia $R^k \to R^s$

- ak R je pole, tak vo VP R^k máme vždy k dispozícii štandardnú bázu $\langle \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k \rangle$
- teda každé lin. zobr. $R^k \to R^s$ je jednoznačne určené obrazmi bázových vektorov $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k$

DEFINÍCIA

Nech R je pole a nech $k, s \in \mathbb{N}$. Matica lineárneho zobrazenia $f\colon R^k \to R^s$ je matica typu $k \times s$ nad R, ktorej i-ty riadok je $f(\vec{e}_i)$ pre $i = 1, \dots, k$. Túto maticu označíme M_f.

PRÍKLAD

Majme lineárne zobrazenie $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(a, b, c) = (-a + b + 2c, 2a + b + 3c)$. Určte M_f.

Obrazy vektorov $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$ z $\mathbb{R}^3$ sú:

$$\left.\begin{aligned} f(1,0,0) &= (-1 + 0 + 2.0, 2.1 + 0 + 3.0) = (-1, 2) \\ f(0,1,0) &= (1, 1) \\ f(0,0,1) &= (2, 3) \end{aligned}\right\} M_f = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Príklady

PRÍKLAD: Určte maticu lineárneho zobrazenia $g\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, $g(x, y) = (2x, -x + iy)$.

Dosadíme bázové vektory: $\left.\begin{array}{l} g(1,0) = (2,-1) \\ g(0,1) = (0,i) \end{array}\right\}$ matica lineárneho zobrazenia je $M_g = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & i \end{pmatrix}$

PRÍKLAD: Aké lineárne zobrazenie má maticu $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{smallmatrix}\right) \in M_{2,2}(\mathbb{R})$?

Vieme, že A je maticou lineárneho zobrazenia $a\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ takého, že $a(1,0) = (2,-1)$ a $a(0,1) = (1,5)$.

Počítajme pre $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:
$a(x, y) = a(x(1,0) + y(0,1)) = xa(1,0) + ya(0,1) = x(2,-1) + y(1,5) = (2x + y, -x + 5y)$.

Bijektívna korešpondencia medzi maticami a lineárnymi zobrazeniami

VETA

Nech R je pole a $k, s \in \mathbb{N}$. Potom ku každému lineárnemu zobrazeniu $f\colon R^k \to R^s$ patrí práve jedna matica $M_f \in M_{k,s}(R)$ taká, že $M_f = \begin{pmatrix} f(\vec{e}_1) \\ \vdots \\ f(\vec{e}_k) \end{pmatrix}$.

Obrátene, ku každej matici $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1s} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{is} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{ks} \end{pmatrix} \in M_{k,s}(R)$ patrí jediné lineárne zobrazenie $f_A\colon R^k \to R^s$ úplne určené tým, že $f_A(\vec{e}_i) = (a_{i1}, \dots, a_{is})$ pre $i = 1, \dots, k$.

Poznámka: Ako uvidíme neskôr, táto jednoznačná korešpondencia umožňuje skúmať vlastnosti lineárnych zobrazení (napr. injektívnosť, atď.) prostredníctvom skúmania vlastností ich matíc (ako je hodnosť a pod.).

Skladanie lineárnych zobrazení

- majme lineárne zobrazenie $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ s maticou $M_f = \left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right) \in M_{2,2}(R)$
- majme lineárne zobrazenie $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ s maticou $M_g = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} \in M_{2,3}(R)$
- zložené zobrazenie $g \circ f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ je tiež lineárne, chceme zistiť jeho maticu $M_{g\circ f}$
- $$\begin{aligned}(g \circ f)(1,0) &= g(f(1,0)) = g(a_{11}, a_{12}) = g(a_{11}(1,0) + a_{12}(0,1)) = a_{11}g(1,0) + a_{12}g(0,1) \\ &= a_{11}(b_{11}, b_{12}, b_{13}) + a_{12}(b_{21}, b_{22}, b_{23}) \\ &= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}, a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}, a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23})\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}(g \circ f)(0,1) &= g(f(0,1)) = g(a_{21}, a_{22}) = g(a_{21}(1,0) + a_{22}(0,1)) = a_{21}g(1,0) + a_{22}g(0,1) \\ &= a_{21}(b_{11}, b_{12}, b_{13}) + a_{22}(b_{21}, b_{22}, b_{23}) \\ &= (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}, a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}, a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23})\end{aligned}$$
- čiže $M_{g\circ f} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} \end{pmatrix} \in M_{2,3}(R)$

Súčin matíc

DEFINÍCIA

Pre matice $A = (a_{ij}) \in M_{k,s}(R)$ a $B = (b_{jt}) \in M_{s,r}(R)$ definujeme ich súčin $A.B$ ako maticu $C = M_{k,r}(R)$, kde $c_{it} = a_{i1}b_{1t} + \cdots + a_{is}b_{st}$ pre $i = 1, \dots k$ a $t = 1, \dots, r$.

PRÍKLAD

Majme reálne matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$.

Potom súčin $AB = \begin{pmatrix} 1.0+2.4 & 1.1+2.(-2) \\ (-1).0+3.4 & (-1).1+3.(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 12 & -7 \end{pmatrix}$, kým súčin $BA = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$.

Poznámka: Vidíme, že násobenie matíc nie je komutatívne.

MATICA zloženého zobrazenia

Ak $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^s$ je lineárne zobrazenie s maticou $M_f \in M_{k,s}(R)$ a $g\colon \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^r$ je lineárne zobrazenie s maticou $M_g \in M_{s,r}(R)$, tak lineárne zobrazenie $g \circ f$ je určené maticou $M_{g \circ f} = M_f.M_g$.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f", "M_f"'] \arrow[rr, bend right, "g \circ f", "M_f.M_g"'] & W \arrow[r, "g", "M_g"'] & S \end{tikzcd}$$

Asociatívnosť súčinu matíc

VETA

Súčin matíc je asociatívny, t. j. $(A.B).C = A.(B.C)$ pre $A \in M_{k,s}(R)$, $B \in M_{s,r}(R)$, $C \in M_{r,z}(R)$.

DÔKAZ

- matice A, B, C sú maticami jednoznačne určených lineárnych zobrazení $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^s$, $g\colon \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^r$, $h\colon \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^z$, čiže $A = M_f$, $B = M_g$, $C = M_h$
- využijúc asociatívnosť skladania zobrazení máme:

$$\begin{aligned}(A.B).C &= (M_f.M_g).M_h = M_{g\circ f}.M_h = M_{h\circ(g\circ f)} = M_{(h\circ g)\circ f} = M_f.M_{h\circ g}\\ &= M_f.(M_g.M_h) = A.(B.C)\end{aligned}$$

Vlastnosti súčinu matíc

1. $A.I_s = I_k.A = A$ pre ľub. $A \in M_{k,s}(R)$
2. násobenie matíc je distributívne vzhľadom na sčitovanie matíc:

$A(B+C) = AB + AC$ pre $A \in M_{k,s}(R)$ a $B, C \in M_{s,r}(R)$

$(A+B).C = AC + BC$ pre $A, B \in M_{k,s}(R)$ a $C \in M_{s,r}(R)$

Zoznam použitých obrázkov

- obr. 1 – 4, na slajdoch 3, 11: B. Pokorná