Vlastnosti lineárnych zobrazení

Lineárna algebra

Barbora Pokorná

KAG, FMFI UK

2020

Súčin matíc a elementárne riadkové operácie

- vykonanie hociktorej ERO na matici $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ môžeme nahradiť jej vynásobením zľava vhodnou maticou
- pre výmenu dvoch riadkov použijeme maticu $E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

  počítajme: $E_1.A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$
- pre vynásobenie riadku nenulovým prvkom c použijeme maticu $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

  počítajme: $E_2.A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ca_{21} & ca_{22} & ca_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$
- pre pripočítanie c-násobku riadku k inému riadku použijeme maticu $E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

  počítajme: $E_3.A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ca_{11} & a_{22}+ca_{12} & a_{23}+ca_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Elementárne matice

DEFINÍCIA

Elementárnou maticou stupňa n, pre $n \in \mathbb{N}$, patriacou k danej ERO rozumieme maticu, ktorá vznikne z jednotkovej matice I_n práve vykonaním danej ERO.

VETA

Nech je daná matica $A \in M_{k,s}(R)$ a nech matica B vznikla z A vykonaním práve jednej ERO. Potom $B = EA$, kde E je elementárna matica stupňa k patriaca k tejto ERO.

PRÍKLAD

Ak $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \overset{\texttt{1.r}\leftrightarrow\texttt{2.r}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \overset{\texttt{2.r+=(-2)*1.r}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \overset{\texttt{3.r+=(-4)*1.r}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & -4 \end{pmatrix} = B$,

tak $B = E_3 E_2 E_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Predpis lineárneho zobrazenia prislúchajúceho matici M_f

LEMA
Pre ľubovoľnú maticu $C = (c_{ij}) \in M_{m,n}(R)$ získame jej j-ty riadok ako $\vec{e}_j.C$, kde $\vec{e}_j \in R^n$.

DÔKAZ

$$\vec{e}_j.C = (0,\dots,0,1,0,\dots,0).\begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{j1} & \dots & c_{jn} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix} = (c_{j1},\dots,c_{jn})$$

VETA
Nech M_f je matica lineárneho zobrazenia $f\colon R^k \to R^s$. Potom pre každé $\vec{x} = (x_1,\dots,x_k) \in R^k$ máme $f(\vec{x}) = f(x_1,\dots,x_k) = (x_1,\dots,x_k).M_f$.

DÔKAZ

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) &= f(x_1\vec{e}_1 + \dots + x_k\vec{e}_k) = x_1 f(\vec{e}_1) + \dots + x_k f(\vec{e}_k) = x_1\vec{e}_1 M_f + \dots + x_k\vec{e}_k M_f \\ &= (x_1\vec{e}_1 + \dots + x_k\vec{e}_k).M_f = (x_1,\dots,x_k).M_f \end{aligned}$$

Vektory ako stĺpce

- my pracujeme s vektormi ako „riadkami“, t. j. maticami typu $1 \times n$

  $$\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$$

- v niektorej literatúre autori chápu vektory ako „stĺpce“, t. j. maticami typu $n \times 1$

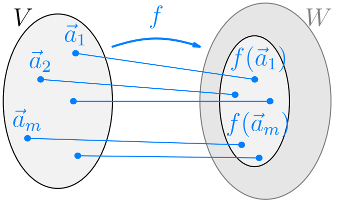
  $$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

- štandardné bázové vektory sú potom $\vec{e}_i^T$, kde $\vec{e}_i$ je štandardný bázový vektor v našom chápaní
- potom matica lineárneho zobrazenia $h\colon R^n \to R^p$ je definovaná ako M^h typu $p \times n$ taká, že jej i-ty stĺpec je $h(\vec{e}_i^T)$
- pre každú maticu jej j-ty stĺpec dostaneme tak, že ju sprava vynásobíme vektorom $\vec{e}_j^T$
- čiže potom máme: $h(\vec{x}) = M^h.\vec{x}$, kde $\vec{x}$ je ľubovoľný vektor z R^n chápaný ako stĺpec

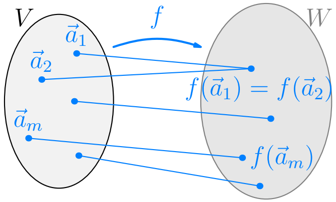
Injektívne, surjektívne a bijektívne lin. zobr.

VETA: Nech V je konečne generovaný vektorový priestor nad poľom R, nech $f\colon V \to W$ je lineárne zobrazenie a nech pre $m \in \mathbb{N}$ je $\langle \vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m \rangle$ je ľubovoľná báza priestoru V. Potom

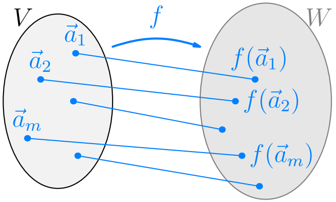
1. f je injektívne práve vtedy, keď $f(\vec{a}_1), \ldots, f(\vec{a}_m)$ sú lineárne nezávislé
2. f je surjektívne práve vtedy, keď $f(\vec{a}_1), \ldots, f(\vec{a}_m)$ generujú celý vektorový priestor W
3. f je linárny izomorfizmus (bijektívne) práve vtedy, keď $f(\vec{a}_1), \ldots, f(\vec{a}_m)$ je báza priestoru W



Obr. 1: f injektívne



Obr. 2: f surjektívne



Obr. 3: f bijektívne

Poznámka: Lineárne zobrazenie medzi nenulovými konečne generovanými VP je lineárnym izomorfizmom práve vtedy, keď zobrazuje bázu na bázu.

Dôkaz vety – injektívnosť

DÔKAZ

1. „$\Rightarrow$“: nech f je injektívne.
   Zvoľme nejaké $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in R$ také, že $\alpha_1 f(\vec{a}_1) + \cdots + \alpha_m f(\vec{a}_m) = \vec{0}$.
   Z lineárnosti f potom máme $f(\alpha_1 \vec{a}_1 + \cdots + \alpha_m \vec{a}_m) = \vec{0}$.
   Lenže lineárne zobrazenie aj nulový vektor zobrazí na nulový, tj. $f(\vec{0}) = \vec{0}$.
   Keďže f je injektívne, tak sa musí platiť $\alpha_1 \vec{a}_1 + \cdots + \alpha_m \vec{a}_m = \vec{0}$.
   Keďže $\langle \vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m \rangle$ je báza a teda ide o LN vektory, tak musí ísť o triviálnu LK, čiže všetky $\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = 0$. A teda aj vektory $f(\vec{a}_1), \ldots, f(\vec{a}_m)$ sú LN.

   „$\Leftarrow$“: nech $f(\vec{a}_1), \ldots, f(\vec{a}_m)$ sú lineárne nezávislé.
   Nech pre nejaké $\vec{x}, \vec{y} \in V$ máme $f(\vec{x}) = f(\vec{y})$.
   Nech ich vyjadrenie v báze je $\vec{x} = \gamma_1 \vec{a}_1 + \cdots + \gamma_m \vec{a}_m$ a $\vec{y} = \delta_1 \vec{a}_1 + \cdots + \delta_m \vec{a}_m$.
   Potom máme $f(\gamma_1 \vec{a}_1 + \cdots + \gamma_m \vec{a}_m) = f(\delta_1 \vec{a}_1 + \cdots + \delta_m \vec{a}_m)$.
   Z lineárnosti zobrazenia f dostaneme $\gamma_1 f(\vec{a}_1) + \cdots + \gamma_m f(\vec{a}_m) = \delta_1 f(\vec{a}_1) + \cdots + \delta_m f(\vec{a}_m)$.
   Po úprave $(\gamma_1 - \delta_1) f(\vec{a}_1) + \cdots + (\gamma_m - \delta_m) f(\vec{a}_m) = \vec{0}$, lenže vektory $f(\vec{a}_1), \ldots, f(\vec{a}_m)$ sú LN.
   Čiže pre $i = 1, \ldots, m$ máme $\gamma_i - \delta_i = 0$ a teda $\vec{x} = \vec{y}$, čiže zobrazenie f je injektívne.

Dôkaz vety – surjektívnosť, bijektívnosť

2 „$\Rightarrow$“: nech f je surjektívne. Chceme ukázať, že $W = [f(\vec{a}_1), \ldots, f(\vec{a}_m)]$.
Určite platí $[f(\vec{a}_1), \ldots, f(\vec{a}_m)] \subset W$, lebo W je vektorový priestor.
Teraz ukážeme opačnú inklúziu.
Keďže f je surjektívne, ku každému $\vec{y} \in W$ existuje $\vec{b} \in V$ také, že $f(\vec{b}) = \vec{y}$.
$\langle \vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m \rangle$ je báza vo V, teda $\vec{b}$ má jednoznačné vyjadrenie v tvare $\vec{b} = \beta_1 \vec{a}_1 + \cdots + \beta_m \vec{a}_m$.
Využijúc lineárnosť f máme $\vec{y} = f(\vec{b}) = f(\beta_1 \vec{a}_1 + \cdots + \beta_m \vec{a}_m) = \beta_1 f(\vec{a}_1) + \cdots + \beta_m f(\vec{a}_m)$,
teda $\vec{y} \in [f(\vec{a}_1), \ldots, f(\vec{a}_m)]$. Takže aj $W \subset [f(\vec{a}_1), \ldots, f(\vec{a}_m)]$. Záver: $W = [f(\vec{a}_1), \ldots, f(\vec{a}_m)]$.

„$\Leftarrow$“: nech $W = [f(\vec{a}_1), \ldots, f(\vec{a}_m)]$.
Potom pre každý vektor $\vec{y} \in W$ existujú $\delta_1, \ldots, \delta_m \in R$ také, že $\vec{y} = \delta_1 f(\vec{a}_1) + \cdots + \delta_m f(\vec{a}_m)$.
Z lineárnosti f máme $\vec{y} = f(\delta_1 \vec{a}_1 + \cdots + \delta_m \vec{a}_m)$. Teda pre každý vektor $\vec{y} \in W$ existuje
$\vec{d} = \delta_1 \vec{a}_1 + \cdots + \delta_m \vec{a}_m \in V$ taký, že $\vec{y} = f(\vec{d})$. Čiže f je surjektívne.

3 „$\Leftrightarrow$“: f je bijektívne $\Leftrightarrow$ f je injektívne aj surjektívne $\Leftrightarrow$ vektory $f(\vec{a}_1), \ldots, f(\vec{a}_m)$ sú lineárne nezávislé a zároveň generujú celý priestor $W \Leftrightarrow \langle f(\vec{a}_1), \ldots, f(\vec{a}_m) \rangle$ je báza vo W

DÔSLEDOK

Nech $f\colon V \to W$ je lineárne zobrazenie a V je konečne generovaný.

1. Ak f je injektívne, tak $\dim(V) \leq \dim(W)$.
2. Ak f je surjektívne, tak $\dim(V) \geq \dim(W)$.
3. Ak f je lineárny izomorfizmus, tak $\dim(V) = \dim(W)$.

Priestory lineárne izomorfné s $V = R^n$

DÔSLEDOK

Každý n-rozmerný vektorový priestor nad poľom R je lineárne izomorfný s vektorovým priestorom R^n.

DÔKAZ

- nech V je n-rozmerný VP nad R, nech $\langle \vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \rangle$ je jeho báza
- nech $\langle \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n \rangle$ je štandardná báza v R^n
- podľa základnej vety o lin. zobr. existuje práve jedno lin. zobr. f: $V \to R^n$ také, že $f(\vec{a}_i) = \vec{e}_i$ pre $i = 1, \ldots, n$
- keďže f zobrazuje bázu na bázu, je to lin. izomorfizmus a teda $V \cong R^n$

Príklad lineárneho izomorfizmu

PRÍKLAD

Nech $V = R^n$ a $W = M_{n,n}^{diag}(R)$ je VP diagonálnych matíc stupňa n.
Tieto vektorové priestory sú lineárne izomorfné.

Hľadaný lineárny izomorfizmus je napr. zobrazenie $f\colon V \to W$ také, že

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & x_2 & \ldots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \ldots & x_n \end{pmatrix}.$$

Poznámka

- pri riešení mnohých otázok lineárnej algebry môžeme pokojne namiesto o danom n-rozmernom VP nad poľom R uvažovať o VP usporiadaných n-tíc prvkov poľa R, teda o R^n
- preto je osobitne dôležité dobre poznať vlastnosti lineárnych zobrazení $R^k \to R^s$

Lineárne zobrazenia $f\colon R^k \to R^s$ a hodnosť matice

VETA

Nech $f\colon R^k \to R^s$ je lineárne zobrazenie. Potom

1. f je injektívne práve vtedy, keď $h(M_f) = k$
2. f je surjektívne práve vtedy, keď $h(M_f) = s$
3. f je lineárny izomorfizmus práve vtedy, keď $h(M_f) = k = s$

DÔKAZ

Matica $M_f = \begin{pmatrix} f(\vec{e}_1) \\ \cdots \\ f(\vec{e}_k) \end{pmatrix}$, kde $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k$ sú vektory štandardnej bázy R^k. Ozn. $S = [f(\vec{e}_1), \ldots, f(\vec{e}_k)]$.

Vieme, že potom $h(M_f) = \dim(S)$.

1. f je injektívne $\Leftrightarrow$ $f(\vec{e}_1), \ldots, f(\vec{e}_k)$ sú LN $\Leftrightarrow$ $\dim(S) = k$ $\Leftrightarrow$ $h(M_f) = k$
2. f je surjektívne $\Leftrightarrow$ $W = [f(\vec{e}_1), \ldots, f(\vec{e}_k)] = S$ $\Leftrightarrow$ $\dim(S) = \dim(W) = s$ $\Leftrightarrow$ $h(M_f) = s$
3. f je bijektívne $\Leftrightarrow$ f je injektívne a surjektívne $\Leftrightarrow$ $h(M_f) = k = s$

Príklady na určovanie vlastností lin. zobr.

PRÍKLAD 1

Určte, či je lin. zobr. $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g(x_1, x_2) = (2x_1 + 3x_2, -x_1 + 4x_2)$ injektívne, resp. surjektívne.

Zistíme hodnosť matice zobrazenia M_g :

$$M_g = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 11/2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad h(M_g) = 2$$

Zobrazenie g je aj injektívne aj surjektívne, je to lineárny izomorfizmus.

PRÍKLAD 2

Určte, či je lin. zobr. $u\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $u(a_1, a_2, a_3) = (a_1 + a_2, a_1 - a_2, a_2 + 2a_3, 3a_3)$ injektívne, resp. surjektívne.

Zobrazenie určite nemôže byť surjektívne, lebo $\dim(V) = 3 < 4 = \dim(W)$.
Pre určenie injektívnosti zistíme hodnosť matice zobrazenia M_u :

$$M_u = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad h(M_u) = 3$$

Zobrazenie u je injektívne.

Regulárna a singulárna matica

DEFINÍCIA

Štvorcová matica stupňa n nad poľom R je regulárna, ak jej hodnosť je n. Ak má hodnosť menšiu ako n, tak je singulárna.

Poznámka: Lin. zobr. $f\colon R^n \to R^n$ je lineárnym izomorfizmom práve vtedy, keď M_f je regulárna.

DEFINÍCIA

Lineárne zobrazenie VP do seba sa nazýva lineárna transformácia tohto priestoru.
Lineárna transformácia priestoru R^n je

- regulárna, ak je lineárnym izomorfizmom, teda ak jej matica je regulárna,
- singulárna, ak nie je lineárnym izomorfizmom, teda ak jej matica je singulárna.

PRÍKLADY

- lineárna transformácia $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, 2x_1 + 4x_2)$ je singulárna, lebo $h(M_f) = h\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 1$
- lineárna transformácia $id_{\mathbb{R}^2}$ je regulárna, lebo $M_{id_{\mathbb{R}^2}} = I_2$ a jej hodnosť je 2

Inverzná matica

- na množine $M_{n,n}(R)$ je násobenie matíc asociatívnou binárnou operáciou
- jej neutrálny prvok je I_n
- pre ktoré matice z $M_{n,n}(R)$ existuje inverzný prvok vzhľadom na násobenie?

DEFINÍCIA

Nech R je pole a nech $n \in \mathbb{N}$. Ak k matici $A \in M_{n,n}(R)$ existuje matica $B \in M_{n,n}(R)$ taká, že $AB = BA = I_n$, tak táto matica je jediná a nazýva sa inverzná matica k matici A a ozn. ju A^{-1}.

PRÍKLAD: K matici $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

je inverzná matica $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -9 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & 6 \end{pmatrix}$.

Existencia inverznej matice

VETA

K matici $A \in M_{n,n}(R)$ existuje inverzná matica A^{-1} práve vtedy, keď A je regulárna.

Dôsledok: Ak A je matica regulárnej lineárnej transformácie f_A priestoru R^n, tak k nej inverzná lineárna transformácia je $f_{A^{-1}}$, čiže $(f_A)^{-1} = f_{A^{-1}}$.

DÔKAZ

- „$\Rightarrow$“: nech k matici $A \in M_{n,n}(R)$ existuje inverzná matica A^{-1}. Teda $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_n$.

  Nech: $f\colon R^n \to R^n$ je lineárne zobrazenie prislúchajúce matici A
  $g\colon R^n \to R^n$ je lineárne zobrazenie prislúchajúce matici A^{-1}

  Potom $M_{g \circ f} = M_f.M_g = A.A^{-1} = I_n = M_{id_{R^n}}$, čiže zložené zobrazenie $g \circ f = id_{R^n}$.
  Zároveň $M_{f \circ g} = M_g.M_f = A^{-1}.A = I_n = M_{id_{R^n}}$, čiže aj zložené zobrazenie $f \circ g = id_{R^n}$.

  Z toho vyplýva, že g je inverzné zobrazenie k f a teda f je bijektívne.
  Čiže f je lineárny izomorfizmus a teda A je regulárna matica.

Pokračovanie dôkazu

- „$\Leftarrow$“: nech $A \in M_{n,n}(R)$ je regulárna matica.
  Čiže $f\colon R^n \to R^n$ je regulárna lineárna transformácia.

  To znamená, že musí existovať k nej inverzná lineárna transformácia $g\colon R^n \to R^n$ taká, že $f \circ g = g \circ f = id_{R^n}$. Nech B je matica prislúchajúca k lineárnej transformácii g.

  Potom máme $AB = M_f.M_g = M_{g\circ f} = M_{id_{R^n}} = I_n$.
  Lenže zároveň $BA = M_g.M_f = M_{f\circ g} = M_{id_{R^n}} = I_n$.

  Z toho vidíme, že ku A existuje inverzná matica a je ňou matica B.

Príklad hľadania inverznej matici

PRÍKLAD: Majme lineárne zobrazenie $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, ktorého matica je $M_f = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Je zobrazenie lineárnym izomorfizmom? Ak áno, určte inverzné zobrazenie f^{-1}.

Počítajme hodnosť matice zobrazenia:
$$h(M_f) = h\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = h\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} = h\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = h\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3.$$
Teda zobrazenie f je lineárny izomorfizmus a môžeme hľadať f^{-1}.

f zobrazuje štandardnú bázu ako $f(1,0,0) = (3,2,1)$, $f(0,1,0) = (4,2,1)$, $f(0,0,1) = (1,0,1)$.
Preto pre f^{-1} musí platiť: $f^{-1}(3,2,1) = (1,0,0)$, $f^{-1}(4,2,1) = (0,1,0)$, $f^{-1}(1,0,1) = (0,0,1)$.

Hľadáme maticu $M_{f^{-1}}$:
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad M_{f^{-1}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Zoznam použitých obrázkov

- obr. 1, 2, 3: B. Pokorná