

Využitie 3D pera pri výučbe Mongeovho zobrazenia

Chiara Blahová^{1*}

Barbora Pokorná^{2†‡}

¹ Katedra didaktiky matematiky, fyziky a informatiky, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

² Katedra algebry a geometrie, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Abstrakt: Pri výučbe Mongeovho zobrazenia, založeného na pravouhlom premietaní do dvoch navzájom kolmých priemetní, sa študenti často stretávajú s problémami v oblasti priestorovej predstavivosti. Náročné je najmä pochopenie vzťahov medzi trojrozmerným objektom a jeho dvojrozmerným zobrazením v nákresni, ako aj interpretácia vzájomných súvislostí jednotlivých priemetov. V príspevku predstavujeme didaktický prístup využívajúci 3D pero, ktorý umožňuje realizovať konštrukcie priamo v priestore. Zameriavame sa najmä na konštrukciu rovinného rezu hranolovej plochy a na názorné priblíženie princípu perspektívnej afinity medzi dvoma rovinami v priestore, ktorá umožňuje lepšie pochopenie osovej afinity realizovanej v rovine. Súčasťou príspevku je návrh didaktických pomôcok vo forme šablón pre 3D pero a metodický postup ich využitia pri priestorových konštrukciách. Navrhnutý prístup porovnávame s tradičným riešením úloh, pričom poukazujeme na jeho potenciál prispieť k rozvoju priestorovej predstavivosti a hlbšiemu porozumeniu geometrických vzťahov.

KLúčové slová: 3D pero, Mongeovo zobrazenie, rovinný rez hranolovej plochy, priestorová predstavivosť

1 Úvod

Mongeovo zobrazenie zohráva dôležitú úlohu vo vyučovaní deskriptívnej geometrie, najmä v odboch, ako sú stavebníctvo, strojárstvo či architektúra. Jeho osvojenie býva pre študentov často náročné, keďže vyžaduje rozvinutú priestorovú predstavivosť a schopnosť prepájať jednotlivé priemety za účelom vytvorenia mentálnej trojrozmernej reprezentácie zobrazovaného telesa, resp. celého komplexu viacerých geometrických útvarov. Tradičné vyučovacie metódy často nedokážu dostatočne prepojiť rovinný priemet s priestorovou realitou. Ako vhodný doplnok sa preto javí implementácia didaktických prístupov

umožňujúcich priame konštruovanie geometrických útvarov v trojrozmernom priestore a ich následnú konfrontáciu s rovinnými priemetmi v nákresni. Cieľom práce je poukázať na potenciál tohto prístupu dopĺňať tradičné metódy a podporovať hlbšie porozumenie geometrických vzťahov.

2 Mongeovo zobrazenie

Hlavná časť textu v nasledujúcej kapitole je spracovaná primárne podľa zdrojov [Pomykalová, 2017], [Korch and Mészáros, 1987] a tiež podľa [Beganová et al., 2022], pričom dopĺňa prístupy autorov [Sklénáriková, 1980] a [Janišová, 2019].

2.1 Princíp metódy

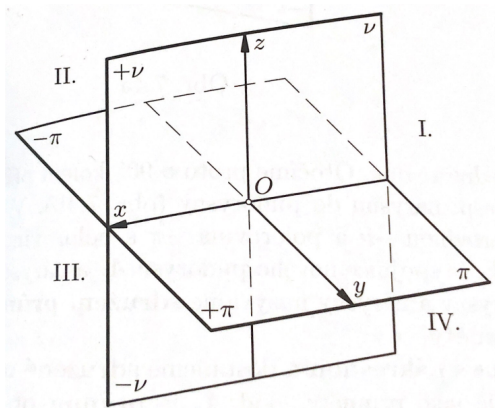
V Mongeovom zobrazení sú dané dve navzájom kolmé súradnicové roviny v pravouhlom trojhrane $Oxyz$, ktoré označujeme gréckymi písmenami. Vodorovná priemetňa π a druhá zvislá priemetňa, ktorú označujeme ν . Priemetňu π nazývame pôdorysňa a priemetňu ν nárysňa. Priesečnica týchto dvoch rovín sa nazýva základnica. V tomto zobrazení používame pravotočivú sústavu súradníc. Jednotlivé osi karteziánskej sústavy súradníc $Oxyz$ sú umiestnené do rovín nasledovne: osou x je práve základnica $x = \pi \cap \nu$, ktorej kladná poloos smeruje doľava, os y leží v pôdorysni a jej kladná poloos smeruje dopredu a os z sa nachádza v náryсни, pričom jej kladná poloos smeruje nahor. Základnica rozdeľuje priemetne na štyri polroviny s označením $+\pi$ (polrovina pred x -ovou osou), $-\pi$ (polrovina za x -ovou osou), $+\nu$ (polrovina nad x -ovou osou) a $-\nu$ (polrovina pod x -ovou osou). Priestor je rozdelený priemetňami na štyri časti, ktoré podľa toho nazývame kvadranty s označením I, II, III, IV. Prvý kvadrant tvorí časť priestoru vymedzeného polrovinami $+\pi$ a $+\nu$, druhý kvadrant polrovinami $-\pi$ a $+\nu$, tretí kvadrant polrovinami $-\pi$ a $-\nu$ a štvrtý kvadrant polrovinami $+\pi$ a $-\nu$. Pozri obr. 1.

Majme bod A v priestore $\mathbb{E}^3$ so súradnicami $A(x^A, y^A, z^A)$. Zhotovíme kolmý priemet bodu A do pôdorysne π pomocou premietacej priamky l_A^1 . Tento

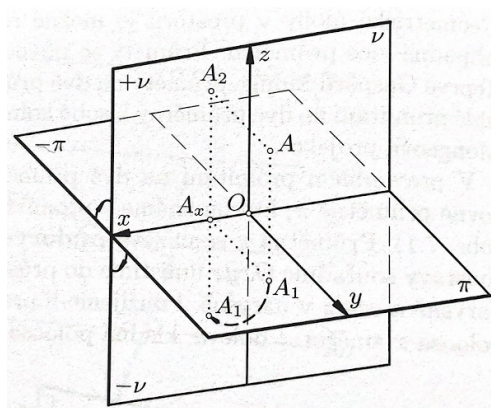
*blahova111@uniba.sk

†barbora.pokorna@fmph.uniba.sk

‡Školiteľ

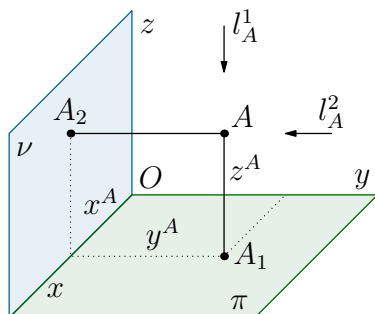


Obr. 1: Súradnicová sústava v priestore, priemetne a kvadranty. Zdroj: [Pomykalová, 2017]



Obr. 3: Otočenie pôdorysne π s cieľom zdruzenia oboch priemetní. Zdroj: [Pomykalová, 2017]

nazývame prvý priemet alebo pôdorys bodu s označením A_1 a súradnicami $A_1(x^A, y^A)$. Pri pôdoryse sa jedná o pohľad zhora. Ak bod A premietneme kolmo do nárysne ν pomocou premietacej priamky l_A^2 , získame tak jeho druhý priemet alebo nárys, ktorý označíme A_2 . Jeho súradnice sú $A_2(x^A, z^A)$ a predstavuje pohľad spredu. Týmto dostávame bijektívne zobrazenie $f: \mathbb{E}^3 \rightarrow \pi \times \nu$, ktoré priradí bodu $A \in \mathbb{E}^3$ usporiadanú dvojicu bodov $(A_1, A_2) \in \pi \times \nu$ (obr. 2).



Obr. 2: Prvý a druhý priemet bodu.

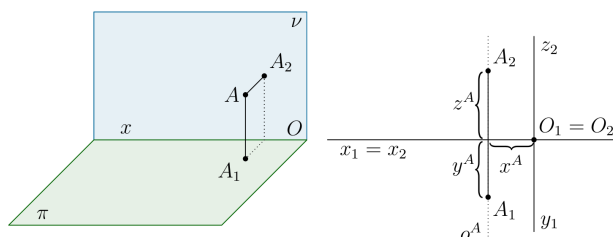
Keďže potrebujeme danú priestorovú situáciu zobrazit' v jednej rovine, otočíme pôdorysnu π o 90° okolo základnice x do nárysne ν (pozri obr. 3), prípadne nárysnu ν do pôdorysne π . Takémuto otáčaniu hovoríme aj sklápanie. Po otočení, resp. sklopení jednej z priemetní do druhej splynú polrovina $+\pi$ s $-\nu$ a polrovina $-\pi$ s $+\nu$.

Stotožneniu pôdorysne s nárysňou hovoríme združenie priemetní a dostávame tak otočenú polohu pôdorysu bodu (uvažujeme otočenie pôdorysne). Označme toto zobrazenie malým o ako otočenie, teda $o: A_1 \rightarrow A_1^0, \pi \rightarrow \pi^0$. Súradnice tohto bodu budú $A_1^0(x^A, y^A)$. Rovinu, ktorá vznikla združením prie-

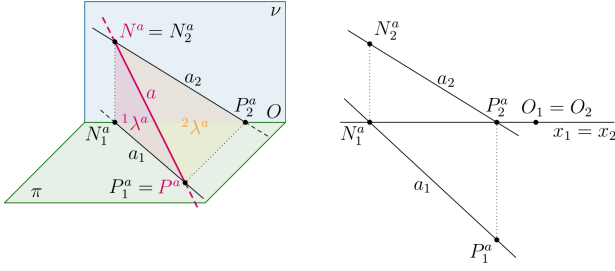
metní, nazveme $\varepsilon = \pi^0 \times \nu$. Práve v nej získavame bijektívne *Mongeovo zobrazenie* $g: A \rightarrow (A_1^0, A_2)$, teda kolmé premietanie na dve navzájom kolmé priemetne. Rovinu ε umiestňujeme do nákresne, ktorou je napríklad tabuľka, zošit alebo obrazovka. Pre jednoduchosť označovania sa horné indexy v otočenej rovine π^0 vynechávajú.

2.2 Obraz bodu

Združením priemetní sme dostali body $A_1(x^A, y^A), A_2(x^A, z^A)$. Táto usporiadaná dvojica bodov (A_1, A_2) predstavuje obraz bodu A v Mongeovom zobrazení (obr.4). Sú to združené priemety (resp. združené obrazy) bodu A , ktoré nazývame rovnako, a to pôdorys a nárys. Môžeme si všimnúť, že priamka A_1A_2 je kolmá na os x , teda na základnicu. Tejto spojnice bodov A_1, A_2 hovoríme ordinála bodu A a budeme ju označovať o^A . V tomto zobrazení splynú združené priemety základnice x , teda $x = x_1 = x_2$ a taktiež splynú združené priemety začiatku súradnicovej sústavy O , teda platí $O = O_1 = O_2$.



Obr. 4: Obraz bodu, združené priemety bodu.



Obr. 5: Obráz priamky, združené priemety priamky.

2.3 Obráz priamky

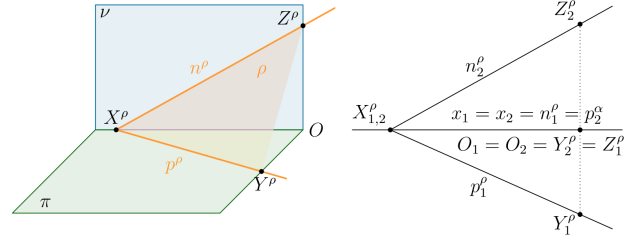
Pod obrazom geometrického útvaru U euklidovského priestoru v nejakom zobrazení rozumieme množinu obrazov všetkých bodov útvaru U . V Mongeovom zobrazení bude obrazom útvaru U množina usporiadaných dvojíc bodov (M_1, M_2) pre všetky body M tohto útvaru U .

Vezmime za útvar U ľubovoľnú priamku a vo všeobecnej polohe vzhľadom na priemetne. Ako sme spomínali, bod premietame pomocou dvoch premietacích priamok. Ak vedíme každým bodom priamky premietaciu priamku, množina bodov premietacích priamok všetkých bodov priamky je práve rovina. Preto priamku vo všeobecnej polohe premietame pomocou dvoch premietacích rovín. Prvá premietacia rovina $^1\lambda^a$ priamky a obsahuje priamku a a je rovnobežná so smerom premietania, teda smeruje kolmo na pôdorysňu π . Druhá premietacia rovina $^2\lambda^a$ priamky a rovnako obsahuje priamku a a je kolmá na nárysňu ν . Prieniky premietacích rovín a priemetní určujú usporiadanú dvojicu priamok (a_1, a_2) , kde $a_1 = \pi \cap ^1\lambda^a$ je pôdorys priamky a a $a_2 = \nu \cap ^2\lambda^a$ je nárys priamky a . Túto usporiadanú dvojicu priamok nazývame združené priemety priamky (obr. 5).

Stopníky priamky sú miesta, v ktorých priamka a pretína jednotlivé priemetne. Priesečník P^a priamky a s pôdorysňou je prvý stopník priamky alebo aj pôdorysný stopník a priesečník N^a priamky a s nárysňou voláme druhý (nárysný) stopník.

2.4 Obráz roviny

Teraz vezmeme za útvar U ľubovoľnú rovinu ρ tak tiež vo všeobecnej polohe vzhľadom na priemetne. Ak by sme každým bodom roviny viedli premietaciu priamku kolmú na priemetňu, potom pravouhlé priemety všetkých týchto bodov roviny ρ pokryjú celú priemetňu. Preto priemetom každej takejto roviny je práve celá priemetňa.



Obr. 6: Obráz roviny, združené priemety stôp roviny.

Pôdorysom každej roviny je teda celá pôdorysňa π a nárysom je celá nárysňa ν . Práve tu dochádza k problému, keďže by sme nevedeli z priemetní jednoznačne určiť danú rovinu v $\mathbb{E}^3$ inverzným zobrazením $f^{-1} : \pi \times \nu \rightarrow \mathbb{E}^3$, čo by znamenalo, že toto zobrazenie by nebolo bijektívne. Tento problém vyriešime nasledovne:

[Beganová et al., 2022] uvádza, že rovina je jednoznačne určená:

1. trojicou nekolineárnych bodov
2. priamkou a bodom, ktorý na nej neleží
3. dvojicou rôznobežných priamok
4. dvojicou rovnobežných priamok

Zobrazenú rovinu teda určíme pomocou ich združených priemietov. V Mongeovom premietaní najčastejšie využívame určenie roviny trojicou nekolineárnych bodov, respektíve dvojicou priamok, konkrétne stôp. Stopy roviny sú miesta, kde rovina pretína obe priemetne. Prvá (pôdorysná) stopa p^ρ roviny je jej priesečnica s pôdorysňou. Druhá (nárysná) stopa n^ρ je priesečnica tejto roviny s nárysňou. Body jednoznačne určujúce rovinu sú priesečníky roviny s osami x, y, z , teda body $X^\rho = \rho \cap x, Y^\rho = \rho \cap y, Z^\rho = \rho \cap z$. Stopy sa pretínajú v bode X^ρ ležiacom na základnici. Obraz roviny v Mongeovom zobrazení tvorí trojica usporiadaných dvojíc $X^\rho(X_1^\rho, X_2^\rho), Y^\rho(Y_1^\rho, Y_2^\rho), Z^\rho(Z_1^\rho, Z_2^\rho)$, ktoré tvoria usporiadané dvojice obrazov stôp $p^\rho(p_1^\rho = X_1^\rho Y_1^\rho, p_2^\rho = X_2^\rho Y_2^\rho), n^\rho(n_1^\rho = X_1^\rho Z_1^\rho, n_2^\rho = X_2^\rho Z_2^\rho)$, pričom obraz začiatku súradnicovej sústavy $O_{1,2}$ je zhodný s nárysom Y_2^ρ a pôdorysom Z_1^ρ a obraz základnice $x_{1,2}$ je zhodný s nárysom p_2^ρ a pôdorysom n_1^ρ (obr. 6).

2.5 Geometrické príbuznosti

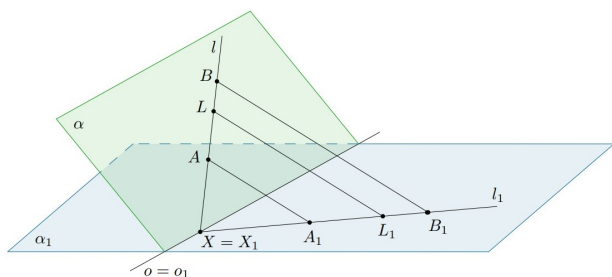
V zobrazovacích metódach, medzi ktoré patrí aj Mongeovo zobrazenie, sa pri zobrazovaní objek-

tov využívajú konštrukcie, ktoré pomáhajú urýchliť proces. V Mongeovom zobrazení vychádzajú tieto pomocné konštrukcie z geometrickej príbuznosti v priestore, ktorou je perspektívna afinita. Pri zobrazovaní do nákresu už pracujeme v rovine, kedy túto geometrickú príbuznosť nazývame osová afinita.

2.5.1 Perspektívna afinita

Afinné zobrazenie medzi dvomi nesúmiestnymi rovinami zobrazuje každé tri rôzne kolineárne body A, L, B z roviny α do troch rôznych kolineárnych bodov A_1, L_1, B_1 na rovinu α_1 , pričom incidencia a deliaci pomer zostávajú nezmenené. Toto afinné zobrazenie je bijektívne, zachováva rovnobežnosť a nesie názov *afinita medzi rovinami* α, α_1 . Ak je obraz bodu zhodný s jeho vzorom, ide o samodružný bod. Na obr. 7 je takým bodom bod $X = X_1$.

Perspektívna afinita je taká afinita, ktorá obsahuje celú priamku samodružných bodov, a tou je os afinity $o = o_1$. Os afinity je priesečnica rovín α, α_1 . Smer afinity určuje jedna z usporiadaných dvojíc bodov - vzor a jeho obraz. Na obr. 7 je to napríklad dvojica bodov (A, A_1) , kde $A \in \alpha, A_1 \in \alpha_1$. Perspektívna afinita je jednoznačne určená osou a smerom afinity. Zapisujeme $PA : \alpha \rightarrow \alpha_1; PA : (o = \alpha \cap \alpha_1; A, A_1)$. Usporiadanie dvojice bodov (A, A_1) a priamok (l, l_1) nazývame afinne združené.



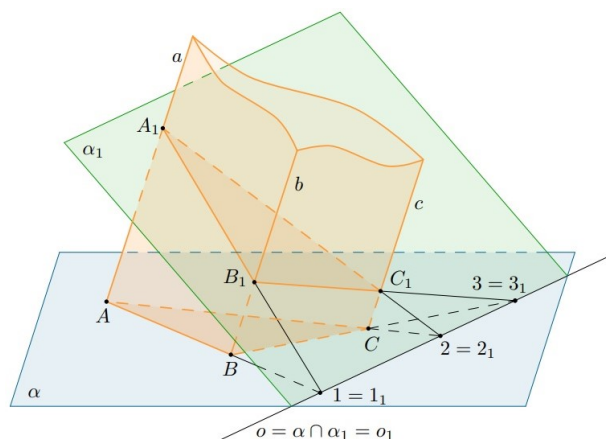
Obr. 7: Perspektívna afinita medzi dvoma rovinami.
Zdroj: [Kudličková et al., 2025]

Práve túto geometrickú príbuznosť využívame pri konštrukcii rovinných rezov na hranoloch, a to aj v Mongeovom zobrazení. Keďže v našej úlohe pracujeme s trojbokým hranolom, vysvetlíme spomínanú príbuznosť na ploche trojbokého hranola, ktorú vidíme na obr. 8. Majme zadanú hranolovú plochu H , ktorej tvoriace priamky sú a, b, c a body A, B, C v rovine α ležia na priamkach a, b, c v danom poradí. Zostrojíme rez hranolovej plochy rovinou α_1 , ktorú určuje priamka $o = o_1$ a bod A_1 . Môžeme si

všimnúť, že „medzi dvoma rovinnými rezmi na tej istej hranolovej ploche rovinami α, α_1 , ktoré nie sú osnovové (t. j. rovnobežné s tvoriacimi priamkami) je vzťah perspektívnej afinity s osou $o = \alpha \cap \alpha_1$.“ [Pokorná, 2025]. Smer afinity určujú afinne združené body $(A \in \alpha, A_1 \in \alpha_1)$ ležiace na tvoriacej priamke a . Body B_1, C_1 zostrojíme nasledovne:

- Nájďeme samodružné body $1 = AB \cap o = 1_1$ a $2 = AC \cap o = 2_1$
- Incidencia sa zachováva, teda $B_1 \in A_1 1_1 \cap b$ a $C_1 \in A_1 2_1 \cap c$
- Kvôli celistvosti konštrukcie rezu doplníme bod $3 = 3_1$, ktorý patrí rovinám α, α_1, BCB_1 a priamky $B3$ a $B_1 3_1$

Afinným obrazom trojuholníka ABC je trojuholník $A_1 B_1 C_1$ v perspektívnej afinitě $PA : (o = \alpha \cap \alpha_1; A, A_1)$ medzi rovinami α, α_1 (obr. 8).

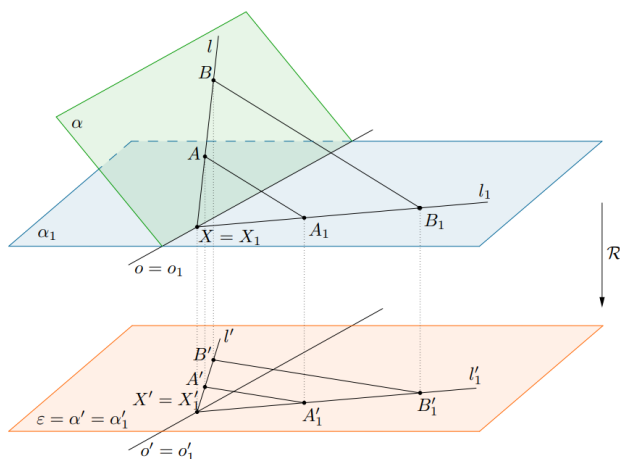


Obr. 8: Perspektívna afinita medzi dvoma rovinnými rezmi hranolovej plochy.
Zdroj: [Kudličková et al., 2025]

2.5.2 Osová afinita

Ak premietneme perspektívnu afinitu medzi rovinami α, α_1 rovnobežným premietaním R do roviny ε v smere rôznobežnom s danými tromi rovinami aj so smerom perspektívnej afinity, získame tak *osovú afinitu v rovine* ε medzi rovinami α', α'_1 . Rovnobežné premietanie i perspektívna afinita sú afinnými zobrazeniami a skladaním takýchto zobrazení opäť získame afinné zobrazenie. Získané zobrazenie zachováva deliaci pomer bodov, teda je afinitou. Nesúmiestne rovinné polia α, α_1 sa tu stávajú súmiestnymi

$\varepsilon = \alpha', \alpha'_1$ (ležia v jednej rovine). Osová afinita v rovine na obr. 9 v spodnej časti je daná osou, ktorá vznikne rovnobežným priemetom osi perspektívnej afinity $o' = o'_1$ a jej smer určuje priemet afinne združených bodov perspektívnej afinity ($A' \in \alpha', A'_1 \in \alpha'_1$). Zapisujeme $OA : (o' = o'_1; A', A'_1)$.



Obr. 9: Osová afinita ako rovnobežný priemet perspektívnej afinity. Zdroj: [Kudličková et al., 2025]

2.6 Význam Mongeovho zobrazenia v praxi

Mongeovo zobrazenie nachádza uplatnenie v širokom spektre odborných oblastí. V strojárstve a technickom kreslení sa využíva pri tvorbe výrobných výkresov súčiastok, kde je nevyhnutná presná špecifikácia rozmerov a zobrazenie objektov vo viacerých pohľadoch. V architektúre, stavebníctve a inžinierskej praxi zohráva významnú úlohu pri navrhovaní a zobrazovaní konštrukcií, zatiaľ čo v geodézii a kartografii sa uplatňuje pri prevode priestorových objektov a terénu do roviny. Schopnosť čítať takúto dokumentáciu je dôležitá aj pre technických pracovníkov rôznych úrovní pri interpretácii priestorových vzťahov. Svoje miesto má aj v oblastiach ako nábytkárstvo či dizajn. Osvojenie princípov pravouhlého premietania je zároveň nevyhnutné pre prácu v CAD systémoch a v počítačovej grafike.

Predmetom vo vzdelávacom procese, na ktorom sa vyučuje Mongeovo zobrazenie, je najmä *deskriptívna geometria*, ktorá využíva zobrazovacie metódy na jednoznačné zobrazenie priestorových objektov do roviny, pričom zo získaných priemetov možno určiť ich geometrické vlastnosti a vzťahy.

Na stredných odborných školách so strojníckym a stavebným zameraním je deskriptívna geometria

spravidla zaradená medzi povinné predmety. Na gymnáziách sa s ňou študenti stretávajú najčastejšie len vo forme voliteľného predmetu. Na vysokých školách býva vyučovanie deskriptívnej geometrie typicky súčasťou povinného základu štúdia v úvodných semestroch, najmä na fakultách architektúry a technicky orientovaných odboroch. Je však potrebné dodať, že predmety zamerané na deskriptívnu geometriu môžu byť označené aj odlišnými názvami.

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave radí matematiku a deskriptívnu geometriu medzi bežné aprobácie v študijnom programe Učiteľstvo akademických predmetov. Základy deskriptívnej geometrie sú vyučované aj v pedagogických študijných odboroch matematiky v kombinácii s rôznymi predmetmi. Učiteľ matematiky musí mať pevné porozumenie axiomaticko-deduktívneho budovania priestorovej geometrie a zároveň zvládať základné zobrazovacie metódy, keďže práve tieto znalosti sú kľúčové pre kvalitné vyučovanie geometrie na základných a stredných školách.

3 Priestorová predstavivosť

Pod pojmom *priestorová predstavivosť* rozumieme „súhrn schopností, ktoré súvisia s predstavami jedinca o priestore, geometrických objektoch, ich vlastnostiach a vzájomných vzťahoch“ (Robová vo [Vavrinčíková, 2014]). Je dôležitou súčasťou nielen rôznych pracovných pozícií, ale aj bežného života. Každý z nás si niekedy potrebuje urobiť náčrt alebo plánik cesty, pozemku, bytu, nábytku rozmiestneného v izbe alebo naopak vedieť prečítať a porozumieť náčrtu, mape, plánu či technickému výkresu [Novotná, 2001].

Predstavivosť je síce vrodená, avšak je nutné ju postupne rozvíjať. Napriek tomu, že konkrétne obdobie vhodné na rozvoj priestorovej predstavivosti nie je stanovené, viacerí autori sa na základe vývinovej psychológie zhodujú na období mladšieho školského, dokonca aj predškolského veku. Kľúčovým prostredím na jej rozvoj je teda škola ako pilier prípravy detí do života a budúceho povolania.

3.1 Geometrická predstavivosť

V školskom vzdelávacom programe sa priestorová predstavivosť najčastejšie rozvíja na predmetoch pokrývajúcich učivá geometrie, konkrétne na predmetoch matematiky, deskriptívnej geometrie, ale aj na

technike, pracovnom vyučovaní alebo výtvarnej výchove. V oblasti stereometrie a v technickej praxi už hovoríme o tzv. *geometrickej predstavivosti*, nakoľko skúma geometrické objekty a ich vlastnosti. Jirotková v [Kudličková et al., 2025] popisuje geometrickú predstavivosť ako „*schopnosti jedinca poznávať geometrické útvary a ich vlastnosti, abstrahovať z konkrétnych objektov ich geometrické vlastnosti, predstaviť si geometrické útvary a ich vzájomné súvislosti na základe rovinných obrazov, mať zásobu predstáv geometrických útvarov a schopnosť si ich vyvolať z pamäti, ale tiež predstaviť si geometrické útvary a vzťahy medzi nimi aj na základe ich opisu.*“

Pri vyučovaní deskriptívnej geometrie sa stáva, že niektorí študenti nevedia vyčítať z náčrtov geometrické vlastnosti a vzťahy zobrazovaných objektov. Jednou z príčin je práve problém s geometrickou predstavivosťou, kedy si študent nevie predstaviť objekt v priestore alebo sú jeho predstavy chybné. Pre správne pochopenie zobrazeného objektu v rovine - náčrtu musia študenti prepájať teoretické poznatky s praxou v priestore. Jednoduchým meradlom porozumenia daných vzťahov z náčrtu je schopnosť študenta ukázať vzťahy na modeli. Preto je dôležité, aby sa počas vzdelávacieho procesu nezanedbávalo modelovanie objektov v priestore. V súčasnosti sa pri výučbe využívajú rôzne stavebnice na tvorbu a tvarovanie telies. Model však študenti nevytvárajú podľa postupu konštrukcie ako na papieri. Ani na konkrétnom modeli nevidia postup konštrukcie objektu, len hotový skonštruovaný záver úlohy, čo je nevýhoda oproti náčrtu. Postupným zostrojovaním náčrtu v náčrtní a vysvetľovaním jednotlivých úkonov učiteľom si totiž študenti osvojujú geometrické príbuznosti oveľa lepšie, ako len pri vysvetľovaní na modeli.

3.2 Problémy s geometrickou predstavivosťou pri Mongeovom zobrazení

Mongeovo zobrazenie predstavuje spôsob zobrazenia priestorového objektu prostredníctvom dvoch združených priemetov, konkrétne pôdorysu a nárysu. Na rozdiel od šikmej axonometrie, ktorá je bežne využívaná už v základnom vzdelávaní, neposkytuje jeden názorný priemet telesa, ale sústavu priemetov vyžadujúcich ich vzájomnú interpretáciu. V pedagogickej praxi sa pri axonometrii často využíva nadhľad sprava alebo zľava, čo prispieva k väčšej názornosti. V porovnaní s axonometriou kladie Mongeovo zo-

brazenie vyššie nároky na priestorovú predstavivosť, keďže si vyžaduje schopnosť mentálne prepojiť jednotlivé priemety do jednotného obrazu objektu.

K zvýšenej náročnosti priestorovej interpretácie konštrukcií prispieva aj využívanie geometrických príbuzností - perspektívnej a osovej afinity. [Kudličková et al., 2025] uvádza, že „*obe tieto geometrické príbuznosti sú študentami často vnímané ako náročné a abstraktné, neraz sa im vo svojej pedagogickej praxi úmyselne vyhýbajú i samotní učitelia deskriptívnej geometrie.*“ Najpravdepodobnejšími koreňmi problému sú vizualizácia, nedostatočné prepojenie perspektívnej a osovej afinity medzi priestorom a rovinou, neprehľadnosť v postupoch rysovania v rovine či celkové nepochopenie zdôvodnenia konštrukcií. Pri postupe konštrukcií sa študenti zrejme uspokojili len s manuálnym prevedením, kedy uniká samotná podstata.

Napriek vyšším nárokom na predstavivosť je Mongeovo zobrazenie nevyhnutné ovládať kvôli jeho častému výskytu v technickej a inžinierskej praxi pri presnom zobrazovaní priestorových objektov do roviny.

4 3D pero

Nástroj 3D pero je zariadenie, ktoré umožňuje „kreslením“ vytvárať trojrozmerné objekty. Princíp fungovania je podobný taviacej pištoľi. Najskôr pripojíme 3D pero k napájaniu prostredníctvom kábla podobného nabíjačke, ktorý zapojíme do elektrickej zásuvky. Stlačením príslušného tlačidla uvedieme 3D pero do prevádzky a nastavíme jeho ohrev na požadovanú teplotu. Po dosiahnutí pracovnej teploty vložíme do vstupného otvoru zariadenia plastové vlákno, tzv. *filament*. 3D pero roztaví filament, ktorý následne vyteká z hrotu, čím umožňuje priestorové kreslenie. Filament necháme počas niekoľkých sekúnd stuhnúť na podložke a po jeho zatvrdnutí ho následne oddelíme od povrchu. (obr. 10)

3D pero najčastejšie podporuje typy filamentov PLA a ABS. Pri tvorbe praktickej úlohy bol použitý filament typu PLA. Teplotu zahriatia je možné nastaviť podľa typu filamentu. Ďalšou funkciou 3D pera je nastavenie rýchlosti vytlačovania filamentu. Zariadenie je ergonomicky tvarované pre pohodlné držanie a je ľahké, teda vhodné aj pre deti. Ovládanie je pomerne jednoduché a funguje prostredníctvom tlačidiel priamo na pere. Výhodou 3D pera sú aj bezpečnostné prvky zabráňujúce prehriatiu, pričom

pri dlhšej nečinnosti dochádza k jeho automatickému vypnutiu. Konečný výsledok závisí od manuálnych zručností používateľ'a.



Obr. 10: 3D pero a filameny. Zdroj: [Mido, nd]

4.1 Výskumné zistenia o využití 3D pera vo vyučovaní

Koncepcia konštrukcionizmu podľa článku [Papert and Harel, 1991] zdôrazňuje, že poznanie vzniká prostredníctvom aktívnej práce s materiálnym svetom. Prístup „learning-by-making“ znamená, že žiaci si počas tvorivej činnosti budujú vedomosti a zároveň vytvárajú hmatateľné objekty. Psychologické výskumy [Hall and Nemirovsky, 2012] ukazujú, že taktilno-kinestetické učenie je veľmi efektívne, najmä ak zahŕňa manipuláciu s objektmi. Tento prístup súvisí s konceptom vteleného poznávania (embodied learning), ktorý zdôrazňuje prepojenie myslenia a telesnej aktivity. Práve moderné technológie, ako 3D tlač a 3D perá, umožňujú žiakom aktívne vytvárať modely a priamo manipulovať s geometrickými objektmi. Autorky [Ng and Sinclair, 2018] analyzujú využitie 3D pera pri výučbe funkcií, pri pochopení pojmu dotyčnica funkcie a kalkulu, pri určení objemov rotačných telies. Zistili, že 3D kreslenie prepája gestá, pohyb ruky a matematické myslenie, čím vzniká hlbšie porozumenie pojmov. Na rozdiel od hotových pomôcok si žiaci modely sami vytvárajú, čo podporuje aktívne učenie a vnímanie matematiky ako procesu.

Článok [Ng et al., 2020] porovnáva účinnosť dvoch technologicky podporených prístupov vo výučbe geometrie: dynamického geometrického prostredia (ako napr. GeoGebra) a práce s 3D perami. Výskum bol realizovaný na žiakoch 6. ročníka, pričom sa sledovalo porozumenie vlastnostiam hranolov a ihlanov pomocou pretestov, posttestov a oneskorených testov. Výsledky ukázali, že žiaci pracujúci s dynamickým geometrickým prostredím dosahovali lepšie okamžité výsledky a vyššiu úroveň porozumenia. Na druhej strane žiaci používajúci 3D perá si vedomosti udržali dlhodobejšie. Štúdia teda naznačuje, že vizuálne technológie podporujú rýchle učenie, zatiaľ čo 3D perá prispievajú k hlbšiemu a trvalejšiemu osvojeniu geometrických poznatkov.

5 Využitie 3D pera vo výučbe Mongeovho zobrazenia

Metóda výučby Mongeovho zobrazenia vysvetľovaním súvislostí na modeli, ako aj metóda výučby konštruovaním priemetu či náčrtu v nákresni, majú svoje výhody. Avšak je obtiažne objasniť študentom postup konštrukcie na hotovom modeli telesa a tiež býva problém s priestorovou predstavivosťou jednotlivých krokov z nákresne.

Prepojenie výhod oboch prístupov umožňuje využitie 3D pera ako didaktického nástroja. Prostredníctvom neho môžu študenti realizovať konštrukcie postupne priamo v priestore a následne ich porovnávať s riešením úlohy v nákresni, vyjadreným prostredníctvom priemetov definujúcich Mongeovo zobrazenie. Priestorová realizácia môže zároveň prispieť k tomu, že sa daný problém stáva lepšie uchopiteľným a zároveň podporuje rozvoj geometrickej predstavivosti študentov.

Rozhodli sme sa preto navrhnúť súbor úloh zameraných na Mongeovo zobrazenie, ktoré je možné realizovať v priestore prostredníctvom využitia 3D pera. Náročnosť jednotlivých úloh je koncipovaná progresívne, v súlade s postupným osvojovaním teoretických poznatkov, od jednoduchších geometrických útvarov až po komplexnejšie konštrukcie. Súbor zahŕňa zobrazenie priamky a roviny vo všeobecnej aj špeciálnych polohách, ďalej zobrazenie telesa s podstavou v pôdorysni, ako aj konštrukciu rovinného rezu takéhoto telesa.

Z uvedeného súboru úloh sme vybrali jednu reprezentatívnu úlohu, na ktorej demonštrujeme možnosti

využitia 3D pera pri priestorových konštrukciách. Ilustračná úloha je zameraná na konštrukciu rezu trojbokej hranolovej plochy s využitím geometrickej príbuznosti, konkrétne osovej (resp. perspektívnej) afinity.

Zadanie úlohy: Zostrojte obraz šikmého trojbokeho hranola $ABCA'B'C'$, ktorého podstava je trojuholník ABC v π , ak bod $B = (-3, 5; 2, 5; 0)$, $A = (-5, 5; 7, 1; 0)$, vzdialenosti strán podstavy sú $|BC| = 3,5$ a $|AC| = 4,5$ a vrchol hornej podstavy $A' = (-9, 7; 5, 1; 3, 8)$. Zostrojte rez tohto hranola rovinou α , ktorá je určená ako $\alpha = p^\alpha B^\alpha$. Prvá stopa roviny je $p^\alpha = \overline{XY}$, kde $X = (2; 0; 0)$ a $Y = (0; 6; 0)$. Bod $B^\alpha \in BB'$ a jeho súradnice sú $B^\alpha = (-4, 5; y; z)$.

5.1 Konštrukcia v Mongeovom zobrazení

Uvádame tradičný postup konštrukcie zadanej úlohy spolu s konštrukciou v nákresni (obr. 11), ktorý sa štandardne využíva vo vzdelávacom procese pri výučbe Mongeovho zobrazenia.

1. Združené priemety B, A, A'

2. Združené priemety C :

- $k_1 = (A_1; 4, 5), k_2 = (B_1; 3, 5)$
- $C_1 = k_1 \cap k_2$
- $C \in \pi \Rightarrow C_2 \in x_{12} \cap o^C$

3. Združené priemety vrcholov hornej podstavy $A'B'C'$:

- prvý priemet hrany AA' je úsečka $A_1A'_1$
- $A_1A'_1 \parallel B_1B'_1 \parallel C_1C'_1 \wedge |A_1A'_1| = |B_1B'_1| = |C_1C'_1|$
- $A'B'C' \in \pi \Rightarrow z^{A'} = z^{B'} = z^{C'}$

4. doplníme združené priemety hrán hranola

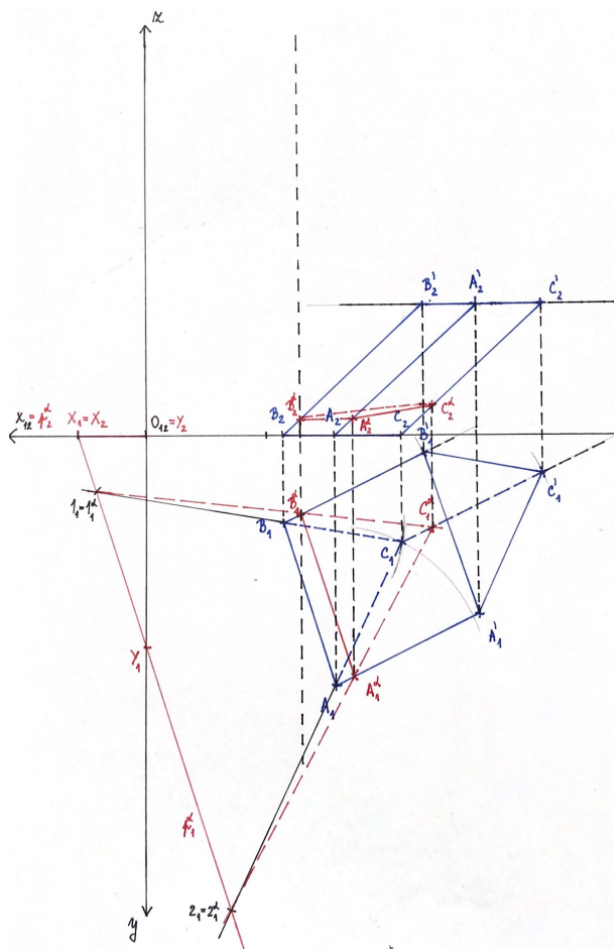
5. určíme viditeľnosť v pôdorysni

6. vyznačíme viditeľné hrany a zakryté hrany v pôdorysni

7. určíme viditeľnosť v nárysni

8. vyznačíme viditeľné hrany a zakryté hrany v nárysni

9. obraz roviny α :



Obr. 11: Konštrukcia rovinného rezu hranola v Mongeovom zobrazení rysovaná tradičným spôsobom na papieri.

• združené priemety X, Y, B^α

• združené priemety pôdorysnej stopy roviny $p_1^\alpha = X_1Y_1, p_2^\alpha = X_2Y_2$

10. Osová afinita $OA(p_1^\alpha, B_1, B_1^\alpha)$ medzi pôdorysmi dvoch rovinných rezov tej istej hranolovej plochy:

- $B_1C_1 \cap p_1^\alpha = \{1_1 = 1_1^\alpha\}$
- $B_1^\alpha 1_1^\alpha \cap C_1C_1' = C_1^\alpha$
- $OA(A_1) = A_1^\alpha$

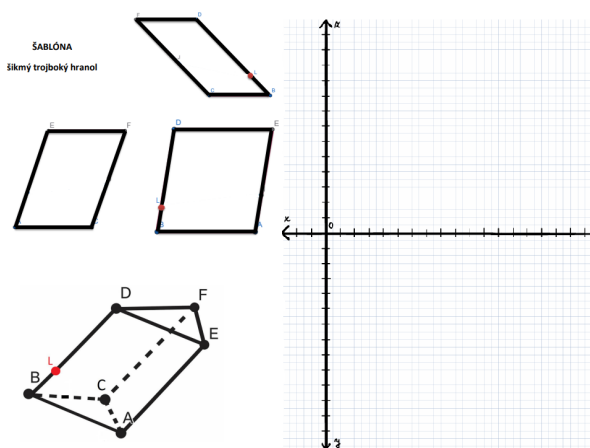
11. určíme nárysy bodov A^α, C^α :

- $A^\alpha \in AA' \Rightarrow A_2^\alpha \in A_2A_2' \cap o^{A^\alpha}$
- $C^\alpha \in CC' \Rightarrow C_2^\alpha \in C_2C_2' \cap o^{C^\alpha}$

12. združené priemety rezu rovinou α na hranole: viditeľnosť strán rezu v súlade s viditeľnosťou stien hranola

5.2 Konštrukcia s využitím 3D pera

Za účelom priestorovej konštrukcie sme navrhli špeciálny transparentný premietací kút. Pri jeho realizácii bol použitý priehľadný papier určený pre atramentovú tlač, na ktorý sme vytlačili karteziánsku mriežku spolu s karteziánskou súradnicovou sústavou používanou v Mongeovom zobrazení (obr. 12 vpravo). Podklad bol následne zalaminovaný, čím sa vytvoril povrch vhodný pre priamu aplikáciu 3D perom. Šablóna šikmého trojbokého hranola (obr. 12 vľavo) je vyhotovená obdobným spôsobom na kancelársky papier. Laminácia povrchu bola zvolená z dôvodu jednoduchšej separácie výsledného modelu od podkladu po stuhnutí filamentu.



Obr. 12: Šablóny pre prácu s 3D perom: sieť trojbokého hranola a súradnicová sústava s mriežkou.

Ďalšou navrhnutou pomôckou je priestorové pravítko konštruované pre potreby lineárneho vedenia 3D pera. Pri návrhu sa kladol dôraz na vlastnosti povrchu a pružnosť materiálu s cieľom umožniť efektívne oddelenie stuhnutého materiálu a zabezpečiť dlhšiu životnosť pomôcky v edukačnom procese.

Postup konštrukcie s využitím 3D pera pozostáva z nasledujúcich krokov.

1. Na zalaminovanú šablónu z obr. 12 vľavo vytvoríme pomocou 3D pera jednotlivé hrany (resp. steny) trojbokého hranola. Po zatvrdnutí filamentu ich zlúpeme zo šablóny a zlepíme k sebe použitím 3D pera (stačí na konce hrán naniesť bodku filamentu a spojiť odpovedajúce si hrany k sebe; perom môžeme vyplniť malé medzery medzi hranami). Následne umiestnime trojboký hranol do 3D kútu tak, aby súradnice bodov A, B zodpovedali zadaniu (obr. 13(a)).

Tento krok pokrýva kroky 1 až 8 v uvedenom bežnom postupe konštrukcie v Mongeovom zobrazení.

2. V 3D kúte nájdeme body X, Y , ktoré tvoria prvú stopu roviny. Následne k nim priložíme pravítko a 3D perom popri pravítku zhotovíme na šablónu priamku predstavujúcu prvú stopu roviny $p^\alpha = \overleftrightarrow{XY}$. Po stvrdnutí filamentu pravítko odlepieme. Konštrukcia je ukázaná na obr. 13(a).

Tento krok zodpovedá kroku 9 v bežnom postupe konštrukcie v nákrese.

3. Pomocou pravítka a 3D pera predĺžime hrany spodnej podstavy CA a CB tak, aby pretli prvú stopu roviny v samodružných bodoch $CB \cap p^\alpha = \{1 = 1^\alpha\}$ a $CA \cap p^\alpha = \{2 = 2^\alpha\}$, ako na obr. 13(b).

4. Využijeme perspektívnu afinitu $PA(p^\alpha, B, B^\alpha)$ medzi dvomi rezmi tej istej hranolovej plochy.

Priložíme pravítko k bodom $B^\alpha, 1^\alpha$ a 3D perom na okraj pravítka nanesieme priamku tak, aby filament prechádzal oboma bodmi. Na hranole tak získame bod roviny α nasledovne: $B^\alpha 1^\alpha \cap CC' = C^\alpha$ (obr. 13(c)). Po zatvrdnutí filamentu pravítko odstránime.

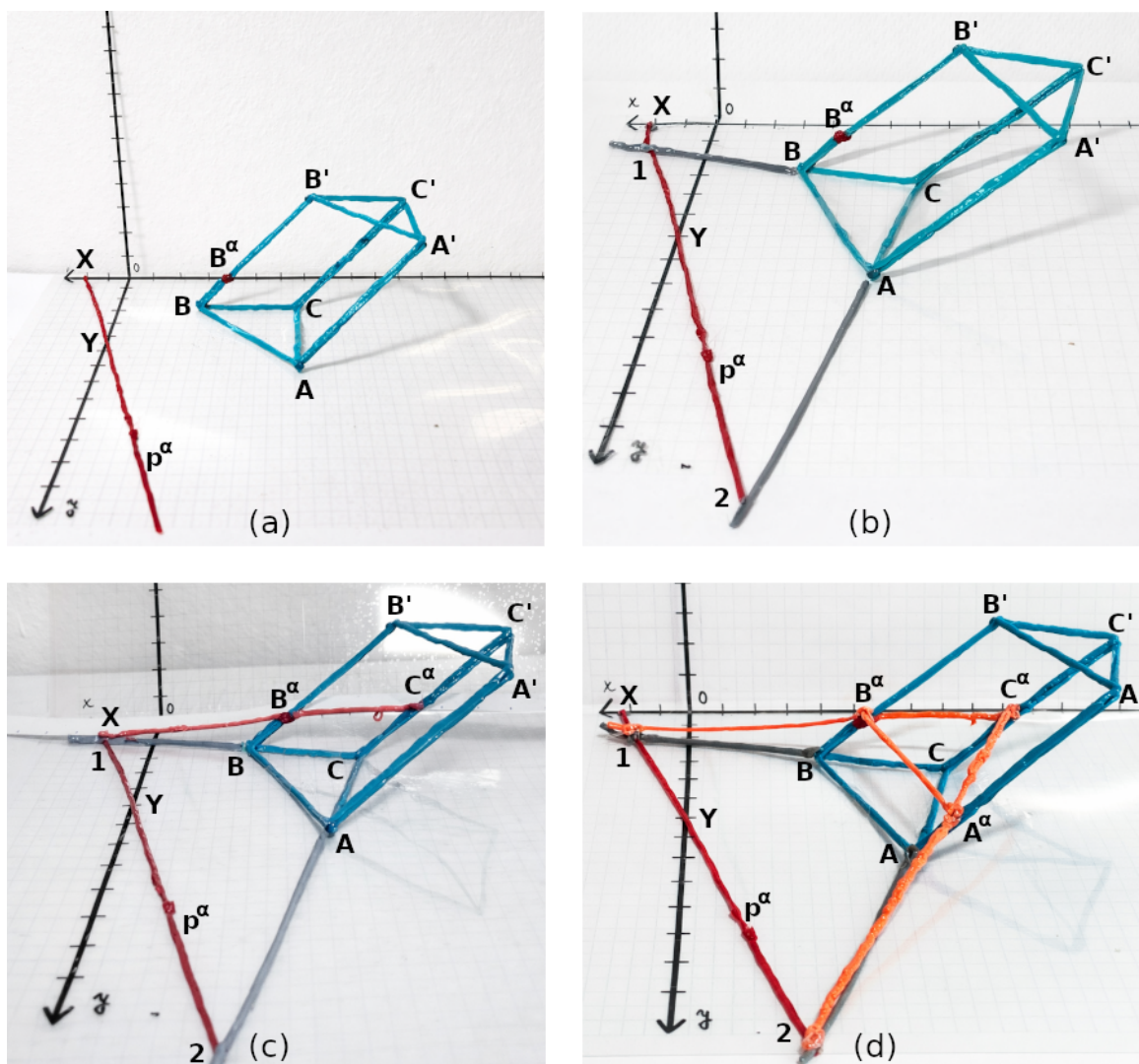
Rovnako skonštruujeme obraz bodu $PA(A) = A^\alpha$ (obr. 13(d)).

Predchádzajúce dva kroky pokrývajú kroky 10 až 12 v uvedenom bežnom postupe konštrukcie v Mongeovom zobrazení.

6 Výsledky a diskusia

Zhotovená konštrukcia rovinného rezu trojbokého hranola umožňuje bezprostredné porovnanie jednotlivých pohľadov na scénu s ich priemetmi v nákrese. Pohľad zhora je v tomto usporiadaní ekvivalentný s pôdorysom používaným v štandardnej konštrukcii (obr. 14). Pohľad na scénu spredu tiež korešponduje s nárysom získaným štandardným konštrukčným postupom. Nárys ako taký by bolo možné analogicky zachytiť fotograficky a následne porovnať.

Pri analýze výsledkov sa ukázalo, že pre lepšiu demonštráciu rezovej roviny by bolo v budúcnosti vhodné upraviť parametre trojbokého hranola (napr. sklon bočných hrán alebo polohu rezovej roviny).



Obr. 13: Postup konštrukcie rovinného rezu hranola s využitím perspektívnej afinity v trojrozmernom priestore.

Cieľom tejto úpravy je dosiahnuť vyššiu mieru názornosti v náryse v nákrese, kde pri súčasnom nastavení dochádza k miernemu vizuálnemu prekrytiu dôležitých elementov rezu.

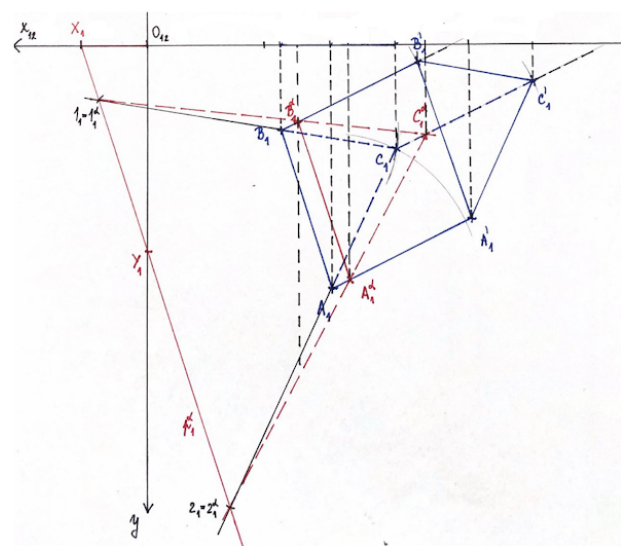
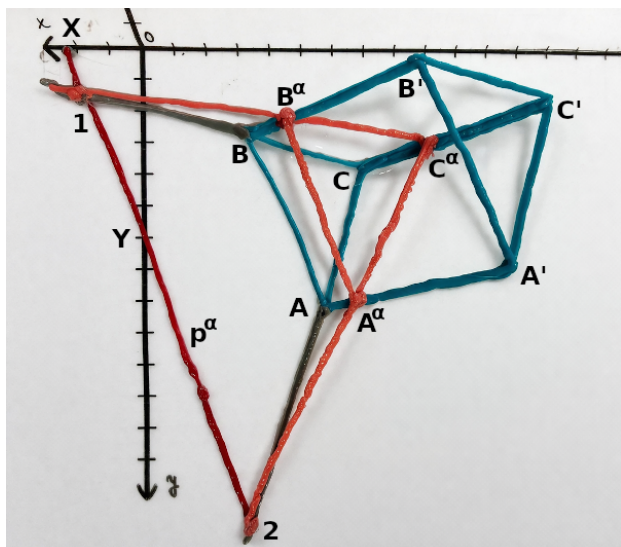
Na rozdiel od klasického rysovania, ktoré vedie k statickému dvojrozmernému obrazu, s ktorým už nie je možné ďalej manipulovať, poskytuje 3D konštrukcia možnosť aktívnej práce s modelom. Model je možné otáčať, meniť uhol pohľadu, sledovať vzájomné polohy prvkov z rôznych perspektív a bezprostredne prepájať trojrozmernú situáciu s jej rovinnými priemetmi. Takýto prístup podporuje rozvoj priestorovej predstavivosti, umožňuje lepšie pochopenie vzťahov medzi objektom a jeho zobrazeniami a zároveň zapája viaceré zmysly, najmä zrak a hmat.

Významným didaktickým prínosom je aj zapojenie pohybu a gest pri samotnej konštrukcii. Pri určovaní

polohy bodov a ich priemetov študent aktívne pracuje rukami v priestore, čím si vytvára prepojenie medzi motorickou činnosťou a geometrickým obsahom. Tento proces je v súlade s konštruktivistickým prístupom k učeniu – študent si poznatky neosvojuje pasívne, ale aktívne ich konštruje na základe vlastnej činnosti, skúmania a overovania. Takto nadobudnuté poznanie býva hlbšie a trvácnejšie.

7 Záver

Využitie 3D pera umožňuje prepojiť tradičné konštrukčné postupy v Mongeovom zobrazení s priestorovou predstavou študentov. Navrhnutý prístup umožňuje realizovať konštrukciu priamo v priestore a následne ju porovnať s jej klasickým zobrazením



Obr. 14: Na obrázku hore je pohľad zhora na scénu vytvorenú pomocou 3D pera, pod ňou sa nachádza pôdorys narysovaný klasickou metódou. Študenti si môžu porovnať obe zobrazenia a overiť, či sa zhodujú.

v nákrese. Hoci pri práci s 3D perom vznikajú určité nepresnosti, tieto neovplyvňujú pochopenie základných geometrických princípov. Priestorová konštrukcia zároveň zlepšuje názornosť a podporuje rozvoj geometrickej predstavivosti. V budúcnosti môže byť tento prístup efektívnym doplnkom tradičnej výučby deskriptívnej geometrie.

V ďalšom výskume plánujeme overiť efektívnosť navrhutej metódy vo vyučovacej praxi, najmä na stredných odborných školách (napr. stavebná priemyslovka), kde má deskriptívna geometria významné zastúpenie. Zároveň chceme implementovať tento

prístup do prípravy budúcich učiteľov matematiky v rámci predmetu *Geometria (3)* a skúmať jeho didaktický prínos.

Do budúcnosti by bolo vhodné realizovať aj kvantitatívny a kvalitatívny výskum zameraný na porovnanie tejto metódy s tradičnými prístupmi, napríklad z hľadiska porozumenia, retencie poznatkov a rozvoja priestorovej predstavivosti. Ďalej plánujeme optimalizovať technické aspekty pomôcok, napríklad presnosť konštrukcie alebo vhodnosť materiálov. Perspektívne sa javí aj prepojenie tejto metódy s digitálnymi technológiami, ako je 3D modelovanie alebo rozšírená realita. V neposlednom rade by bolo prínosné preskúmať možnosti využitia tejto metódy pri inkluzívnom vzdelávaní, najmä u žiakov so zrakovým znevýhodnením.

Pod'akovanie

Táto práca bola podporená grantami KEGA č. 038UK-4/2024 a KEGA č. 070UK-4/2026 realizovanými na Univerzite Komenského v Bratislave. Ďakujeme autorskému kolektívu [Kudličková et al., 2025] za možnosť používať vo vlastných obrázkoch farebnú schému navrhnutú v ich knihe.

Literatúra

- [Beganová et al., 2022] Beganová, J., Rückschlossová, T., Valášková, L., Vajsáblková, M., and Tereňová, Z. (2022). *Deskriptívna geometria pre stavebné odbory*. STU v Bratislave.
- [Hall and Nemirovsky, 2012] Hall, R. and Nemirovsky, R. (2012). Modalities of body engagement in mathematical activity and learning. *Journal of the Learning Sciences*, 21(2):207–215.
- [Janišová, 2019] Janišová, L. (2019). *Pravoúhlá axonometrie pro střední školy*. Diplomová práca, Univerzita Karlova, Praha. dostupné online, citované 20.1.2026.
- [Korch and Mészáros, 1987] Korch, J. and Mészáros, K. (1987). *Deskriptívna geometria pre 1. ročník SPŠŠ*. SNTL.
- [Kudličková et al., 2025] Kudličková, S., Bátorová, M., and Macková, A. (2025). *Tradičné a inovatívne rozvíjanie priestorovej predstavivosti*. Univerzita Komenského v Bratislave, Bratislava. Online verzia.
- [Mido, nd] Mido (n.d.). 3d pen magic pen 3d + refills za3932 (blue). Obrázok produktu – 3D pero Magic Pen s náplňami.

- [Ng et al., 2020] Ng, O. L., Shi, L., and Ting, F. (2020). Exploring Differences in Primary Students' Geometry Learning Outcomes in Two Technology-Enhanced Environments: Dynamic Geometry and 3D Printing. *International Journal of STEM Education*, 7(1):50.
- [Ng and Sinclair, 2018] Ng, O. L. and Sinclair, N. (2018). Drawing in Space: Doing Mathematics with 3D Pens. In *Uses of Technology in Primary and Secondary Mathematics Education*, pages 301–313. Springer.
- [Novotná, 2001] Novotná, Z. (2001). Rozvíjení prostorové představivosti pomocí modelování barevnými krychlemi. Master's thesis, Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, Katedra matematiky a didaktiky matematiky, Praha. Vedúci práce: Milan Koman.
- [Novotný and Zukerstein, 2011] Novotný, J. and Zukerstein, J. (2011). *Současné trendy v oblasti popularizace technického vzdělávání na základních, středních a vysokých školách*. Univerzita Jana Evangelisty Purkyně v Ústí nad Labem, Fakulta výrobních technologií a managementu, Ústí nad Labem, 1 edition. Publikace je přílohou k časopisu Journal of Technology and Information Education (ISSN 1803-6805 online, ISSN 1803-537X print).
- [Papert and Harel, 1991] Papert, S. and Harel, I. (1991). Situating Constructionism. In Papert, S. and Harel, I., editors, *Constructionism*, pages 1–11. Ablex Publishing.
- [Pokorná, 2025] Pokorná, B. (2025). Mongeovo zobrazení. Katedra algebry a geometrie, FMFI UK, Bratislava. Online; accessed 2026-03-23.
- [Pomykalová, 2017] Pomykalová, E. (2017). *Deskriptivní geometrie pro střední školy*. Prometheus, Praha.
- [Sklenáriková, 1980] Sklenáriková, Z. (1980). *Zobrazovací metody II*. FMFI UK, Bratislava. učebné texty, pôvodné vydanie 1976.
- [Vavrinčíková, 2014] Vavrinčíková, B. (2014). Rozvíjanie priestorovej predstavivosti pomocou modelovania telies. Osvedčená pedagogická skúsenosť edukačnej praxe. IX. kolo výzvy, odborné stanovisko: Tatiana Sotáková.