

Bézierove krivky a ich vlastnosti v Minkowského priestore

Barbora Gallusová*

Školiteľ: Pavel Chalmovianský†

Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky, FMFI UK, Mlynská Dolina, 842 48 Bratislava

Abstrakt: Práca sa zaoberá určením podmienok pre riadiace vrcholy Bézierovej krivky druhého stupňa v trojrozmernom Minkowského priestore tak, aby každý bod krivky bol priestorový. Sú tu odvodené nutné podmienky pre krajné riadiace vrcholy. V závislosti od týchto dvoch vrcholov boli skúmané podmienky pre stredný riadiaci vrchol, resp. oblasť stredných riadiacich vrcholov takých, že Bézierova krivka bude priestorová.

Kľúčové slová: Bézierova krivka, Minkowského priestor, priestorová krivka

1 Úvod

Bézierove krivky ako modelovací nástroj majú široké praktické uplatnenie. Minkowského priestor poslužil ako matematický aparát pre špeciálnu teóriu relativity. Niektoré vlastnosti kriviek sa po prechode do Minkowského priestoru zmenia. V Minkowského priestore delíme body a vektory na časové, svetelné a priestorové. Cieľom tejto práce je popísať vlastnosť priestorovosti, čiže za akých podmienok budú všetky body Bézierovej krivky priestorové.

Podobný problém bol skúmaný v článku [Geo08], výsledok je uvedený v teoretickej časti. Autor však používal odlišnú definíciu priestorovej krivky a preto aj výsledky sú odlišné od výsledkov získaných v tejto práci.

2 Teoretická príprava

V tejto kapitole sú uvedené základné definície a vety. Čo je Minkowského priestor, jeho základné vlastnosti a odlišnosti oproti euklidovskému priestoru, delenie bodov, vektorov a kriviek. Je tu spomenutá definícia a vlastnosti Bézierových kriviek, ktoré sú dôležité pre túto prácu.

Definícia 1 (Pseudo-euklidovský priestor). *Pseudo-euklidovský priestor (ozn. \mathbb{R}_p^n), kde $n, p \in \mathbb{N}$, je n -rozmerný reálny vektorový priestor, v ktorom*

je definovaný pseudo-skalárny súčin nasledovne: $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n-p} x_i y_i - \sum_{j=n-p+1}^n x_j y_j$, kde $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n), \bar{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}_p^n$.

Veta 1 (Vlastnosti pseudo-skalárneho súčinu). *Pseudo-skalárny súčin je zobrazenie $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}_p^n \times \mathbb{R}_p^n \rightarrow \mathbb{R}$, ktoré má pre $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \mathbb{R}_p^n$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ nasledujúce vlastnosti:*

1. Bilineárnosť: $\langle \alpha \bar{x} + \bar{y}, \bar{z} \rangle = \alpha \langle \bar{x}, \bar{z} \rangle + \langle \bar{y}, \bar{z} \rangle$,

2. Symetrickosť: $\langle \bar{x}, \bar{z} \rangle = \langle \bar{z}, \bar{x} \rangle$,

3. Nedegenerovanosť: ak $\langle \bar{x}, \bar{z} \rangle = 0$ pre všetky $\bar{z} \in \mathbb{R}_p^n$, potom $\bar{x} = \bar{0}$.

Definícia 2 (Pseudo-karteziánska sústava súradníc). *Pseudo-karteziánskou sústavou súradníc priestoru \mathbb{R}_p^n nazývame sústavu súradníc, ktorej súradnicové osi x_1, \dots, x_n sú navzájom kolmé a pretínajú sa v jednom bode O . Tento súradnicový systém označujeme $S(O, x_1, \dots, x_n)$. Osi x_1, \dots, x_{n-p} nazývame priestorové, osi x_{n-p+1}, \dots, x_n časové.*

Definícia 3 (Minkowského priestor). *Minkowského priestor je pseudo-euklidovský priestor, kde $p = 1$, teda priestor \mathbb{R}_1^n .*

Definícia 4 (Priestorový, časový a svetelný vektor). *Nech vektor $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_1^n$. Ak $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle > 0$ (resp. < 0), \bar{x} nazývame priestorový (resp. časový) vektor. Ak $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle = 0$, hovoríme, že \bar{x} je svetelný vektor.*

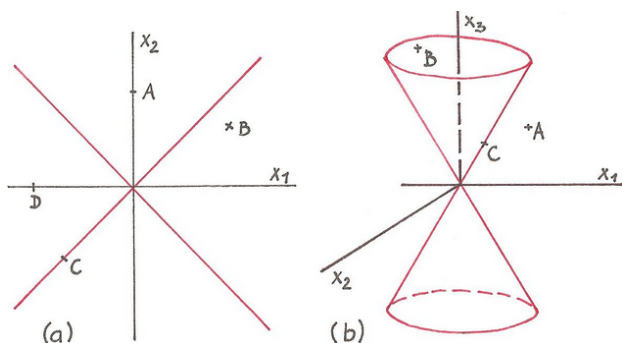
Definícia 5 (Priestorový, časový a svetelný bod). *Nech bod $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_1^n$. Nech $S(O, x_1, \dots, x_n)$ je pseudo-karteziánska sústava súradníc v tomto priestore. Označme \bar{x} jeho polohový vektor $\bar{x} = \overline{Ox}$. Hovoríme, že bod je priestorový (resp. časový alebo svetelný), ak jeho polohový vektor je priestorový (resp. časový alebo svetelný).*

Poznámka 1. *Všetky svetelné vektory, t.j. také, ktorých veľkosť je nulová, tvoria tzv. svetelný kužel. Vnútri tohto kužela sa nachádzajú časové vektory, mimo kužela priestorové, obr. 1.*

Podobne ako sme rozdelili body a vektory na priestorové, svetelné a časové, dajú sa rozdeliť aj krivky. Pri tomto delení existujú dva prístupy. Jeden je zameraný na body samotnej krivky, druhý na jej dotykové vektory. Uvedieme obe definície delenia.

*gallusova1@st.fmfi.uniba.sk

†pavel.chalmoviansky@fmfi.uniba.sk



Obr. 1: Prípád (a) znázorňuje priestor \mathbb{R}_1^2 . Bod $A = [a_1, a_2]$ je časový (pre jeho súradnice platí $a_1^2 - a_2^2 < 0$), bod $C = [c_1, c_2]$ je svetelný ($c_1^2 - c_2^2 = 0$) a body $B = [b_1, b_2]$ a D sú priestorové ($b_1^2 - b_2^2 > 0$). Prípád (b) znázorňuje priestor \mathbb{R}_1^3 . Bod B je časový, bod C je svetelný a bod A je priestorový.

Definícia 6 (Priestorová, časová, svetelná krivka). Hovoríme, že krivka je priestorová (resp. časová, svetelná) ak každý jej bod je priestorový (resp. časový, svetelný).

Definícia 7 (Priestorová, časová, svetelná krivka). Hovoríme, že krivka je priestorová (resp. časová, svetelná) ak dotykový vektor v každom jej bode je priestorový (resp. časový, svetelný).

Definícia 8 (Bézierova krivka v Minkowského priestore). Bézierovou krivkou stupňa n nazývame polynomicke zobrazenie $b : I \rightarrow \mathbb{R}_1^d$, dané predpisom: $b(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) b_i$ pre $t \in I \subset \mathbb{R}$. Body $b_i \in \mathbb{R}_1^d$, kde $i \in \{0, \dots, n\}$ nazývame riadiacimi vrcholmi. Polynómy $B_i^n(t)$, kde $i \in \{0, \dots, n\}$ sú Bernsteinove polynómy stupňa n . Číslo t nazývame parameter krivky.

Poznámka 2. Pod I najčastejšie rozumieme interval $[0, 1]$, pretože Bernsteinove polynómy $B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$, kde $i \in \{0, \dots, n\}$ sú nad ním nezáporné.

Bézierove krivky majú nasledujúce vlastnosti [Cha09], [Geo08].

Veta 2 (Interpolácia koncových bodov). Platí, že $b(0) = b_0$ a $b(1) = b_n$.

Veta 3 (Konvexný obal riadiacich vrcholov). Bézierova krivka leží v konvexnom obale svojich riadiacich vrcholov.

Veta 4 (Prerozdelenie). Nech Bézierova krivka $b(t)$ je určená riadiacimi vrcholmi b_0, b_1, b_2 . Ak rozdelíme

Bézierovu krivku v bode určenom parametrom $t = \frac{1}{2}$, dostaneme dve Bézierove krivky $b'(t)$ a $b''(t)$. Riadiace vrcholy krivky $b'(t)$ sú $b_0, \frac{1}{2}b_0b_1, b(\frac{1}{2})$ a riadiace vrcholy krivky $b''(t)$ sú $b(\frac{1}{2}), \frac{1}{2}b_1b_2, b_2$.

Veta 5 (Derivácia). Platí, že $\frac{d}{dt}b(t) = n \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) \Delta b_i$, kde $\Delta b_i = b_{i+1} - b_i$.

V článku [Geo08] sú uvedené niektoré vlastnosti priestorových Bézierových kriviek v \mathbb{R}_1^3 , pričom autor používa definíciu 7. Jednou z nich je aj nasledovná veta.

Veta 6. Nech $b(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) b_i$ je Bézierova krivka v Minkowského priestore. Ak sú vektory $\Delta b_i = b_{i+1} - b_i$ pre $i \in \{0, \dots, n-1\}$ priestorové, potom je $b(t)$ priestorová.

3 Podmienka priestorovosti

V tejto časti hľadáme nutné a postačujúce podmienky pre riadiace vrcholy Bézierovej krivky druhého stupňa tak, aby bola priestorová v zmysle definície 6. Budeme pracovať v trojrozmernom Minkowského priestore. Na začiatku odvodíme nutné podmienky pre jej krajné riadiace vrcholy. Ďalej budeme predpokladať, že krajné riadiace vrcholy sú pevne dané a v závislosti od nich budeme skúmať podmienky pre stredný riadiaci vrchol. Uvedieme tri rôzne prístupy k ich získaniu, pričom každý bude mať svoje výhody a nevýhody.

3.1 Nutné podmienky pre krajné body

Majme Minkowského priestor \mathbb{R}_1^3 . Vezmime Bézierovu krivku druhého stupňa s riadiacimi vrcholmi A, C a B v tomto poradí, ozn. $b_{ACB}(t)$.

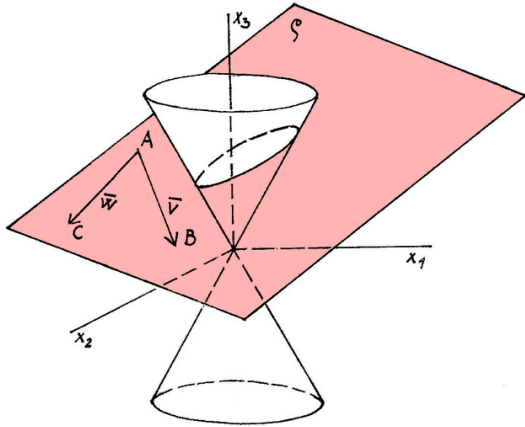
Označme $A = [a_1, a_2, a_3]$ a $B = [b_1, b_2, b_3]$. Aby bola Bézierova krivka priestorová, musí byť podľa definície 6 každý jej bod priestorový. Podľa vety 2 body A a B patria krivke a teda musia byť priestorové. Preto ich súradnice musia spĺňať nutné podmienky

$$a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 > 0, \quad (1)$$

$$b_1^2 + b_2^2 - b_3^2 > 0. \quad (2)$$

3.2 Stredný riadiaci vrchol

Našli sme nutné podmienky pre začiatočný a koncový riadiaci vrchol Bézierovej krivky. Nech teda A, B sú



Obr. 2: Od polohy bodu C závisí natočenie roviny ρ . Od natočenia ρ závisí útvar vyt'atý na svetelnom kuželi.

pevne dané a splňajú podmienky (1) a (2). Hľadajme podmienky pre stredný riadiaci vrchol C .

Keďže Bézierova krivka druhého stupňa je časťou paraboly, bude ležať v rovine, označme ju ρ . Táto rovina $\rho = A + t\bar{v} + s\bar{w}$, kde $t, s \in \mathbb{R}$ je určená bodom A a vektorom $\bar{v} = \overline{AB}$, ktoré poznáme a vektorom $\bar{w} = \overline{AC}$, ktorý nepoznáme. Podľa toho ako sa bude meniť bod C , bude sa otáčať táto rovina okolo osi \overline{AB} . Na svetelnom kuželi ρ vytne elipsu, parabolu alebo hyperbolu (ďalej len kužel'osečku K) ako vidieť na obr. 2.

Poznámka 3. V špeciálnych prípadoch môže byť vyt'atým útvarom bod (vrchol kužel'a), priamka (ρ je dotykovou rovinou ku kužel'u) alebo dve priamky (ak os $x_3 \in \rho$). Tieto prípady popíšeme zvlášť, keď zistíme ako vyzerajú hľadané podmienky pre elipsu, parabolu a hyperbolu.

Aby bola Bézierova krivka $b_{ACB}(t)$ priestorová, musí každý jej bod ležať mimo svetelného kužel'a. Teda v závislosti od natočenia ρ mimo vyt'atej elipsy, resp. paraboly alebo hyperboly. Stačí vyriešiť úlohu v rovine ρ pre jednotlivé typy kužel'osečiek a následne previesť do celého priestoru. Nasleduje niekoľko prístupov k riešeniu tohto rovinného problému. Odteraz budeme pracovať v lokálnych súradniciach roviny ρ , v pseudo-karteziánskej sústave súradníc $S_\rho(O, x, y)$. Nech v $S_\rho(O, x, y)$ sú súradnice riadiacich vrcholov $A = [a_x, a_y]$, $C = [c_x, c_y]$ a $B = [b_x, b_y]$.

3.3 Analytický prístup

V tejto časti sa snažíme vyjadriť podmienky (nutné alebo postačujúce) pre súradnice bodu C analyticky. Ak má Bézierova krivka ležať mimo K , ich prienikom musí byť prázdna množina. Vyjadríme ako vyzerá všeobecný predpis ich priesečníka. Potom nastavme podmienky tak, aby priesečník neexistoval.

Nech $K : \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \delta x + \varepsilon y + \zeta = 0$, kde $\alpha, \dots, \zeta \in \mathbb{R}$. Bézierova krivka, kde jedinou neznámy je bod C , je určená rovnicou $b(t) = t^2(A - 2C + B) + t(-2A + 2C) + A$, kde $t \in [0, 1]$. Odtiaľ dostávame rovnice pre súradnice jej bodov $[b_x(t), b_y(t)]$

$$\begin{aligned} b_x(t) &= t^2(a_x - 2c_x + b_x) + t(-2a_x + 2c_x) + a_x, \\ b_y(t) &= t^2(a_y - 2c_y + b_y) + t(-2a_y + 2c_y) + a_y. \end{aligned}$$

Keďže priesečník je bodom Bézierovej krivky, budeme ho identifikovať podľa jeho parametra t . Do rovnice K dosadíme Bézierovu krivku a dostaneme

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha b_x^2(t) + \beta b_x(t)b_y(t) + \gamma b_y^2(t) \\ &\quad + \delta b_x(t) + \varepsilon b_y(t) + \zeta. \end{aligned}$$

Tento výraz chápeme ako polynóm v premennej t a môžeme ho upraviť do tvaru

$$0 = k_4 t^4 + k_3 t^3 + k_2 t^2 + k_1 t + k_0, \quad (3)$$

kde koeficienty k_0, \dots, k_4 sú výrazy obsahujúce súradnice bodov A, B, C a parametre kužel'osečky α, \dots, ζ .

Tento polynóm štvrtého stupňa má najviac štyri korene (reálne alebo komplexné), označme ich t_1, t_2, t_3, t_4 . Ak pre niektoré $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ je $t_i \in (0, 1) \subset \mathbb{R}$ znamená to, že Bézierova krivka a K majú spoločný bod $b(t_i)$ (vylúčili sme parametre $t = 0$ a $t = 1$, pretože prislúchajú bodom A, B , ktoré sú priestorové). To ale nechceme a preto dostávame podmienky

$$\text{ak } t_i \in \mathbb{R}, \text{ tak musí byť } t_i < 0 \text{ alebo } t_i > 1, \quad (4)$$

pre všetky $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Každé t_i je výraz, kde jediné neznáme sú súradnice bodu C . Podmienky (4) teda priamo určujú postačujúce a zároveň nutné podmienky pre bod C . Keď sme však pomocou CAS Maxima vyjadrili korene t_1, t_2, t_3, t_4 , dostali sme obrovské výrazy, z ktorých nevieme vyjadriť podmienky na praktické použitie.

Dajú sa použiť len ako rozhodovacie pravidlo, či pre známe A, C, B je $b_{ACB}(t)$ priestorová. Ak totiž poznáme A, C, B , vieme zistiť parametre kužel'osečky a CAS Maxima vie vypočítať konkrétne t_1, t_2, t_3, t_4 . Ak platia podmienky (4), Bézierova krivka $b_{ACB}(t)$ je priestorová.

Poznámka 4. Pre niektoré špeciálne prípady sa pomocou podmienok 4 podarilo odvodiť analytické vyjadrenie nutných a zároveň postačujúcich podmienok pre bod C . Uved'me príklad. Nech $K : x^2 + y^2 = 1$, $A = [-1, 0]$ a $B = [l, 0]$, kde $l > 2, l \in \mathbb{R}$ je pevne zvolené. Hľadáme vhodné C na priamke $x = 0$. Použili sme CAS Maxima na vyjadrenie t_1, t_2, t_3, t_4 , pričom jedinou neznámou bolo c_y . Podmienky vyzerali nasledovne: $c_y > 2$ alebo $c_y < -2$. Ak c_y spĺňa túto podmienku, $b_{ACB}(t)$ je priestorová. Ak ju nespĺňa, $b_{ACB}(t)$ priestorová nie je. Správnosť výsledku sa dá dokázať, napríklad využitím symetrie celého príkladu vzhľadom na os y .

3.4 Iteratívny algoritmus

Ak nevieme získať praktické podmienky pre bod C , chceme aspoň pre dané C rozhodnúť, či je $b_{ACB}(t)$ priestorová. V predchádzajúcej časti sme uviedli ako sa to dá pomocou nástroja, ktorý vie presne vypočítať korene rovnice štvrtého stupňa. V tejto časti sa pokúsime rozhodnúť o danom C bez použitia takéhoto nástroja.

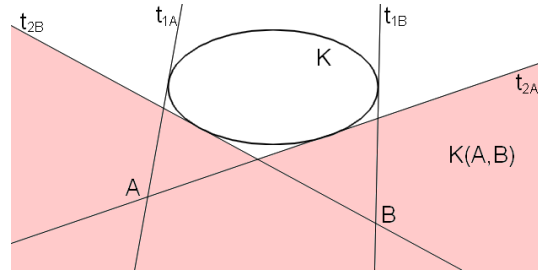
Využijeme vetu 3 a vetu 4.

V nasledujúcom texte budeme predpokladať, že z priestorových bodov A, B vieme zostrojiť dotyčnice ku K , z každého dve. Musíme si uvedomiť, že touto podmienkou vylúčime niektoré body, napríklad stred hyperboly.

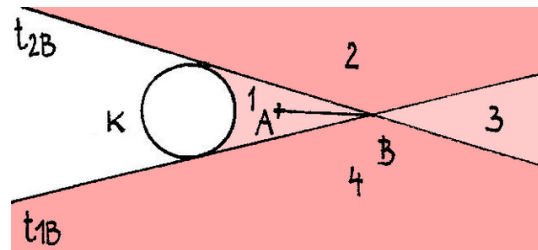
Definícia 9 (Oblasť $K(A, B)$). Majme body A, B a kužel'osečku K . Označme $t_{1A}, t_{2A}, t_{1B}, t_{2B}$ dotyčnice z A, B ku K . Nech $t_{od} = \{t_{ij}, \text{kde } i \in \{1, 2\}, j \in \{A, B\}\}$ a platí, že t_{ij} oddeľuje K a úsečku AB . Potom $K(A, B) = \cup V_{ij}$, kde V_{ij} je polrovina určená dotyčnicou $t_{ij} \in t_{od}$, ktorá neobsahuje K (obr. 3).

Poznámka 5. Takto definovaná $K(A, B)$ môže byť aj prázdna množina. Ak prienik úsečky AB a K je neprázdny, množina t_{od} je prázdna a teda je prázdna aj $K(A, B)$.

Lema 1. Ak $AB \cap K = \emptyset$, potom množinu t_{od} tvoria dve priamky.



Obr. 3: Oblasť $K(A, B)$ je určená dotyčnicami $t_{1A}, t_{2A}, t_{1B}, t_{2B}$ z bodov A, B ku kužel'osečke.



Obr. 4: Bod A môže ležať v jednej zo štyroch častí určených dotyčnicami t_{1B}, t_{2B} z bodu B ku kužel'osečke K .

Dôkaz. Body A, B sú priestorové, teda existujú $t_{1A}, t_{2A}, t_{1B}, t_{2B}$. Skúmame dotyčnice z bodu B . Môžu nastať tri prípady:

1. Nech dotyčnice $t_{1B}, t_{2B} \notin t_{od}$. Z toho vyplýva, že A leží vo výseku ohraničenom t_{1B}, t_{2B} a K , čo je časť 1 na obr. 4. Potom pre obe dotyčnice z A platí, že oddeľujú AB od kužel'osečky a teda $t_{od} = \{t_{1A}, t_{2A}\}$.

2. Nech dotyčnica $t_{1B} \in t_{od}$ a dotyčnica $t_{2B} \notin t_{od}$. Dotyčnice t_{1B}, t_{2B} rozdelia rovinu na štyri časti, obr. 4. Ak jedna z priamok patrí do t_{od} , musí bod A ležať v časti 2 alebo časti 4. Keby obe priamky $t_{1A}, t_{2A} \notin t_{od}$, museli by podľa prípadu 1 obe priamky $t_{1B}, t_{2B} \in t_{od}$, čo je spor. Tiež nemôžu obe priamky $t_{1A}, t_{2A} \in t_{od}$, lebo to by musel bod A ležať v časti 1, čo je spor. Preto existuje len jedno $i \in \{1, 2\}$ také, že $t_{od} = \{t_{iA}, t_{iB}\}$.

3. Nech dotyčnice $t_{1B}, t_{2B} \in t_{od}$. Potom bod A leží v časti 3, pozri obr. 4. Z toho priamky $t_{1A}, t_{2A} \notin t_{od}$ a teda $t_{od} = \{t_{1B}, t_{2B}\}$. \square

Veta 7. Ak $AB \cap K = \emptyset$, potom $K(A, B)$ je neprázdna množina daná ako zjednotenie dvoch polrovín.

Dôkaz. $K(A, B)$ je neprázdna, lebo pre každé $C \in AB$ platí, že $C \in K(A, B)$. Zvyšok je priamym dôsledkom lemy 1. \square

Veta 8. Ak $C \in K(A, B)$, potom $b_{ACB}(t)$ je priestorová.

Dôkaz. Ak $C \in K(A, B)$, potom vnútro $\triangle ABC$ leží mimo K . Potom podľa vl. 2 Bézierových kriviek je $b_{ACB}(t)$ priestorová. \square

Vďaka vete 8 nám oblasť $K(A, B)$ poskytuje akýsi hrubý odhad, či C vyhovuje podmienke. Ak pre dané A, C, B a K je $K(A, B)$ neprázdna a $C \in K(A, B)$, potom dané C vyhovuje podmienke a úloha je vyriešená. Ak $C \notin K(A, B)$, zatiaľ o C nevieme rozhodnúť.

Budeme postupne prerozdeľovať $b_{ACB}(t)$ na menšie segmenty $b_{A_i C_i B_i}(t)$ v zmysle vety 4. Pre každý segment sa budeme pýtať, či $C_i \in K(A_i, B_i)$. Ak pre nejaké i oblasť $K(A_i, B_i)$ je prázdna množina, musíme daný segment opäť prerozdeliť. Ak by sme po n prerozdeleniach dostali 2^n segmentov $b_{A_1 C_1 B_1}(t), \dots, b_{A_{2^n} C_{2^n} B_{2^n}}(t)$ spĺňajúcich, že $C_i \in K(A_i, B_i)$ pre všetky $i = 1, \dots, 2^n$, na základe vety 3 a vety 4 môžeme povedať, že pre dané C je $b_{ACB}(t)$ priestorová.

Na rozhodnutie, či C spĺňa požiadavku, že Bézierova krivka $b_{ACB}(t)$ je priestorová, budeme používať nasledovný rekurzívny algoritmus:

1. krok: Ak C leží v $K(A, B)$, podľa vety 8 vyhovuje podmienke a algoritmus skončí. Ak C neleží v $K(A, B)$, nájdeme bod $b(\frac{1}{2})$.
2. krok: Ak bod $b(\frac{1}{2})$ nie je priestorový, t.j. neplatí $b(\frac{1}{2})_1^2 - b(\frac{1}{2})_2^2 > 0$, potom Bézierova krivka nie je priestorová a teda bod C nevyhovuje a algoritmus skončí. Ak bod $b(\frac{1}{2})$ je priestorový, prerozdelíme Bézierovu krivku $b_{ACB}(t)$ v zmysle vety 4. Na oba segmenty aplikujeme 1. krok, prípadne potom 2. krok.

Koniec algoritmu nastane:

1. Bud' po n -krokoch jeden z bodov $b(\frac{i}{2^n})$, $i = 1, \dots, 2^n$, nebude priestorový a teda celá Bézierova krivka nebude priestorová. Potom uvažovaný C nespĺňa podmienku.
2. Alebo po n krokoch 2^n segmentov Bézierovej krivky bude spĺňať $C_i \in K(A_i, B_i)$. Teda podľa vety 8 je každý segment Bézierovej krivky priestorová krivka. Potom uvažovaný C spĺňa podmienku.

Otázkou je, či je tento algoritmus konečný. Rozlíšme tri prípady:

1. Nech $b_{ACB}(t)$ a K nemajú spoločné body, čiže Bézierove krivka je priestorová. Čím viac prerozdelení $b_{ACB}(t)$ urobíme, tým viac sa bude tvar riadiaceho polygónu približovať k tvaru Bézierovej krivky. Pri dostatočnom počte prerozdelení bude pre každý segment $b_{A_i C_i B_i}(t)$ platiť, že C_i je tak blízko úsečky $A_i B_i$, že $C_i \in K(A_i, B_i)$. Nastane prípad 1 a algoritmus skončí.
2. Nech $b_{ACB}(\frac{1}{2})$ a K majú spoločné body, nie všetky dotykové. Po dostatočnom počte prerozdelení pre nejaké i bude celý segment $b_{A_i C_i B_i}(t)$ ležať v K . Potom jeho bod $b_{A_i C_i B_i}(t)$ je priestorový. Nastane prípad 2 a algoritmus skončí.
3. Nech $b_{ACB}(\frac{1}{2})$ a K majú spoločné len dotykové body. Ak sú dotykové body tvaru $b_{ACB}(\frac{i}{2^n})$, nastane prípad 2 a algoritmus skončí. Ak sú však dotykové body iného tvaru, napríklad $b(t_0)$ pre $t_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, algoritmus neskončí. Segment okolo dotykového bodu sa bude stále zmenšovať, ale nenastane ani jedna z ukončujúcich podmienok. Treba pridať dodatočnú podmienku, napríklad ak sú body A, B príliš blízko seba (v zmysle euklidovskej vzdialenosti), algoritmus skončí s tým, že nevie o bode C rozhodnúť a pravdepodobne existuje dotykový bod.

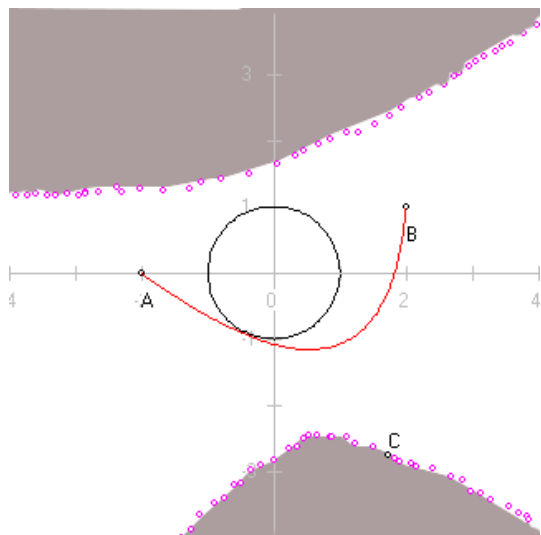
Poznámka 6. V prípade hyperboly (nakol'ko sa skladá z dvoch samostatných kriviek) by sme mali s takto definovanou oblasťou $K(A, B)$ problém. Preto by sme celú úlohu riešili samostatne pre každú z jej dvoch častí a výsledné riešenie by sme získali ako prienik týchto dvoch čiastkových riešení.

3.5 Prístup hľadáním dotyku rádu 1

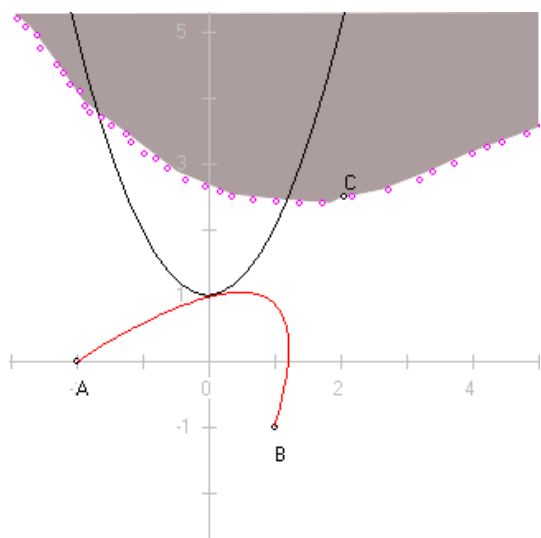
Skúsme nájsť oblasť H obsahujúcu všetky body C vyhovujúce podmienke, že $b_{ACB}(t)$ je priestorová.

Za účelom získania základnej predstavy o tejto oblasti H bol vytvorený program *Experiment*. Vykreslí skúmanú kuželosečku K a body A, B . Je možné posúvať bod C , pričom sa okamžite prekreslí Bézierova krivka $b_{ACB}(t)$.

Obrázky 5, 6 vznikli ako výsledky programu *Experiment*.



Obr. 5: Kužel'osečkou $K : x^2 + y^2 - 1 = 0$ je jednotková kružnica, bod $A = [-1, 0]$ a bod $B = [2, 1]$.



Obr. 6: Kužel'osečkou $K : x^2 + 1 = 0$ je parabola, bod $A = [-3, 0]$ a bod $B = [-5, 6]$.

Poznámka 7. Experiment vie pracovať len so základnou elipsou, parabolou a hyperbolou. Avšak ostatné kužel'osečky sú len výsledok otočenia a posunutia, takže ľubovoľnú situáciu možno namodelovať len posúvaním bodov A a B . V programe je možné vykresľovať aj špeciálne prípady, keď kužel'osečka je bod, priamka alebo dve priamky.

Definícia 10 (Množina ∂H). Označme ∂H množinu takých bodov C' , že Bézierova krivka $b_{AC'B}(t)$ má s kužel'osečkou K práve jeden spoločný bod alebo práve dva spoločné body.

Z pozorovania možno vysloviť nasledovné hy-

potézy.

Hypotéza 1. ∂H je množina spojitých kriviek.

Hypotéza 2. H je sčasti ohraničená krivkami z ∂H .

Hypotéza 2 je vyslovená na základe toho, že situácia, keď $b_{ACB}(t)$ sa dotýka K , je akosi hranicou medzi stavom, kedy $b_{ACB}(t)$ a K nemajú spoločné body a kedy majú viac spoločných bodov.

Za predpokladu, že táto ∂H existuje, je otázkou ako ju nájsť. Povedali sme, že ∂H tvoria také C' , že Bézierova krivka $b_{AC'B}(t)$ a K majú spoločné len dotykové body. To vedie k úvahám o existencii surjektívneho zobrazenia $\sigma : D_\sigma \rightarrow \partial H$, kde D_σ je zatiaľ neznámy definičný obor. Z definície 10 vyplýva, že $D_\sigma \subset K$, pretože pre každé $C' \in \partial H$ existuje bod $[x_0, y_0] \in K$ taký, že $C' = \sigma([x_0, y_0])$ a $b_{AC'B}(t) \cap K = [x_0, y_0]$. Ak zistíme ako vyzerajú σ a D_σ , získame hľadanú hranicu ∂H .

3.5.1 Zobrazenie σ

Predpis zobrazenia σ nájdeme z nasledovnej požiadavky. Ak $[x_0, y_0]$ je dotykový bod $b_{AC'B}(t)$ a K , potom $\sigma([x_0, y_0]) = C'$.

Nech t_B je dotyčnica k Bézierovej krivke v bode $[x_0, y_0]$ (existuje, lebo to nie je koncový bod) a nech t_K je dotyčnica ku kužel'osečke v bode $[x_0, y_0]$ (existuje, lebo kužel'osečka je regulárna krivka). Keďže $[x_0, y_0]$ je spoločný dotykový bod $b_{AC'B}(t)$ a K , musí $t_K = t_B$. Platí nasledujúca veta.

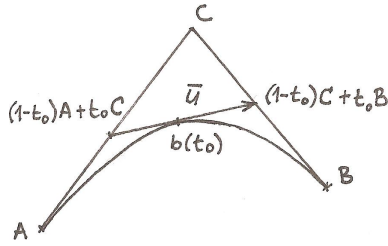
Veta 9 (Dotyčnica v regulárnom bode). Nech $P = [x_0, y_0]$ je regulárny bod rovinatej afinnej algebraickej krivky K danej rovnicou $f(x, y) = 0$. Potom dotyková priamka ku krivke K v bode P je daná rovnicou

$$(x - x_0) \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{[x_0, y_0]} + (y - y_0) \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{[x_0, y_0]} = 0.$$

Všetky body uvažovanej kužel'osečky K sú regulárne, teda ak K má rovnicu $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, potom dotyčnica t_K v bode $[x_0, y_0]$ má rovnicu

$$0 = (2Ax_0 + By_0 + D)(x - x_0) + (2Cy_0 + Bx_0 + E)(y - y_0).$$

Dotyčnicu t_B odvodíme iným spôsobom, obr. 7. Nech $t_0 \in (0, 1)$ je také, že $b(t_0) = [x_0, y_0]$. Podľa vety 5 možno povedať, že t_B má parametrické vyjadrenie $t_B(t_0) = b(t_0) + s\bar{u}$, kde $s \in \mathbb{R}$ a $\bar{u} = (1 - t_0)\bar{AC} + t_0\bar{CB}$.



Obr. 7: Vektor $\bar{u} = (1 - t_0)\overline{AC} + t_0\overline{CB}$ je vektor dotyčnice k Bézierovej krivke v bode $b(t_0)$.

Rozpísaním pre jednotlivé súradnice $t_B(t_0)$ dostaneme

$$\begin{aligned} x &= x_0 + s[(1 - t_0)(c_x - a_x) + t_0(b_x - c_x)], \\ y &= y_0 + s[(1 - t_0)(c_y - a_y) + t_0(b_y - c_y)], \end{aligned}$$

vylúčením parametra s dostaneme rovnicu t_B

$$\begin{aligned} 0 &= [(1 - t_0)(c_y - a_y) + t_0(b_y - c_y)](x - x_0) \\ &\quad - [(1 - t_0)(c_x - a_x) + t_0(b_x - c_x)](y - y_0). \end{aligned}$$

Keďže $[x_0, y_0] = b(t_0)$ a $t_B = t_K$, dostávame sústavu troch rovníc

$$\begin{aligned} x_0 &= a_x(1 - t_0)^2 + 2t_0(1 - t_0)c_x + b_x t_0^2, \\ y_0 &= a_y(1 - t_0)^2 + 2t_0(1 - t_0)c_y + b_y t_0^2, \\ -(2Ax_0 + By_0 + D)[(1 - t_0)(c_x - a_x) + t_0(b_x - c_x)] \\ &= (2Cy_0 + Bx_0 + E)[(1 - t_0)(c_y - a_y) + t_0(b_y - c_y)]. \end{aligned}$$

Úpravou prvých dvoch a ich dosadením do tretej dostaneme ekvivalentnú sústavu

$$c_x = \frac{x_0 - a_x(1 - t_0)^2 - b_x t_0^2}{2t_0(1 - t_0)}, \quad (5)$$

$$c_y = \frac{y_0 - a_y(1 - t_0)^2 - b_y t_0^2}{2t_0(1 - t_0)}, \quad (6)$$

$$0 = \alpha t_0^2 + \beta t_0 + \gamma, \quad (7)$$

kde

$$\begin{aligned} \alpha &= (Ba_x + 2Ca_y - Bb_x - 2Cb_y)y_0 + Da_x - Db_x \\ &\quad + (2Aa_x + Ba_y - 2Ab_x - Bb_y)x_0 + Ea_y - Eb_y \\ \beta &= 4Cy_0^2 + (4Bx_0 - 2Ba_x - 4Ca_y + 2E)y_0 + 4Ax_0^2 \\ &\quad + (-4Aa_x - 2Ba_y + 2D)x_0 - 2Da_x - 2Ea_y \\ \gamma &= -2Cy_0^2 + (-2Bx_0 + Ba_x + 2Ca_y - E)y_0 \\ &\quad - 2Ax_0^2 + (2Aa_x + Ba_y - D)x_0 + Da_x + Ea_y. \end{aligned}$$

Rovnica (7) je kvadratická, preto dostaneme dva korene t_0 . Len pre jeden však platí, že $t_0 \in (0, 1)$. Tento späťne dosadíme do rovníc (5), (6) a dostaneme $\sigma([x_0, y_0]) = [c_x, c_y]$, čo je hľadaný predpis pre σ spĺňajúci požiadavku určenú na začiatku. Ostáva určiť D_σ , lebo odtiaľ volíme body $[x_0, y_0]$.

Ak platí hypotéza 1, krivky tvoriace ∂H sú štvrtého stupňa, pretože body $[x_0, y_0] \in D_\sigma$ vystupujú v rovnici (7) v druhej mocnine (keďže ide o bod z kužeľosečky) a následne t_0 vystupuje v druhej mocnine v rovniciach (5) a (6).

3.5.2 Definičný obor D_σ

Chceme určiť definičný obor D_σ zobrazenia σ tak, aby bod

$$X \in D_\sigma \subset K \text{ práve vtedy, keď } \sigma(X) \in \partial H. \quad (8)$$

V nasledujúcom texte budeme predpokladať, že z bodov A, B vieme zostrojiť dotyčnice $t_{1A}, t_{2A}, t_{1B}, t_{2B}$ ku K . Označme príslušné body dotyku $T_{1A}, T_{2A}, T_{1B}, T_{2B}$. Ak pre dané A, B a K existujú body C_1, C_2 také, že $b_{AC_1B}(t)$ a $b_{AC_2B}(t)$ majú s K práve dva spoločné body, označme ich $\{U_1, U_2\} = b_{ACB}(t) \cap K$ a $\{U_3, U_4\} = b_{ACB}(t) \cap K$. Takéto body U_i sú najviac štyri.

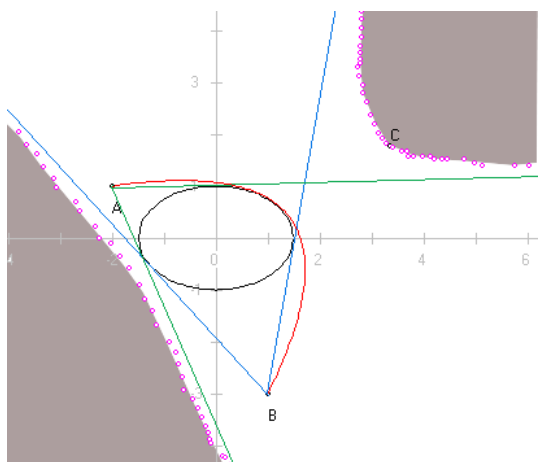
Pokusy z *Experimentu* naznačujú, že $D_\sigma \subset K$ sa skladá z niekoľkých oblúkov, ktoré sú na K presne určené. Ukazuje sa, že koncové body týchto oblúkov môžu tvoriť len body $T_{1A}, T_{2A}, T_{1B}, T_{2B}$ alebo U_1, U_2, U_3, U_4 , pričom body $T_{ij} \notin D_\sigma$, kým body $U_i \in D_\sigma$.

Body $U_i \in D_\sigma$, pretože spĺňajú (8).

Body $T_{ij} \notin D_\sigma$, ukážeme sporom. Nech povedzme bod $T_{1A} \in D_\sigma$. Podľa podmienky (8) existuje taký bod C_T , že bod T_{1A} je spoločný dotykový bod $b_{AC_TB}(t)$ a K . Dotyčnica t_{1A} potom musí byť zároveň aj dotyčnicou k $b_{AC_TB}(t)$ v bode T_{1A} . Krivka $b_{AC_TB}(t)$ je krivkou druhého stupňa. ľubovoľná dotyčnica ku krivke druhého stupňa má s krivkou práve jeden spoločný bod, bod dotyku. Lenže $A, T_{1A} \in t_{1A}$ a súčasne $A, T_{1A} \in b_{AC_TB}(t)$, čo je spor. podobne sa dá dôkaz urobiť pre body T_{2A}, T_{1B}, T_{2B} .

Dotyčnice z A, B ku K budú pravdepodobne tvoriť asymptoty ku krivkám z ∂H , obr. 8. Je to preto, že čím je C vzdialenejší od AB , tým viac sa $b_{ACB}(t)$ približuje k svojmu konvexnému obalu, presnejšie k AC a CB .

Z pozorovaní sa ukazuje, že D_σ sa skladá z jedného až štyroch oblúkov. Tento počet pravdepodobne



Obr. 8: Krivky ∂H tvoriace hranicu hľadanej oblasti H majú asymptoty, ktoré tvoria dotyčnice z bodov A, B ku kuželosečke K .

závisí od počtu bodov U_i a tiež od vzájomnej polohy bodov T_i .

Ak sa ukáže, že D_σ sa skladá z oblúkov, potvrdí sa hypotéza 1, lebo zobrazenie σ je polynomicke a teda spojitě. Presný popis D_σ sa zatiaľ nepodarilo nájsť.

3.5.3 Hľadaná oblasť H

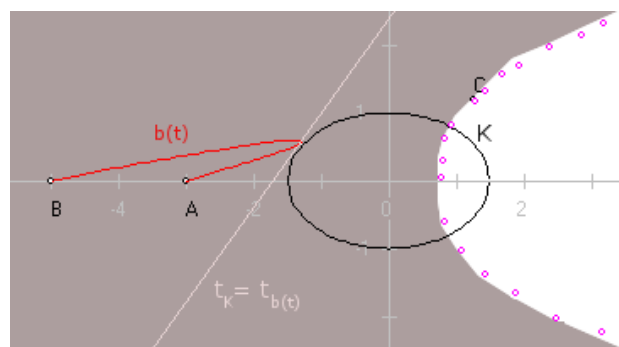
Vo výpočtoch sme našli hranicu ∂H , za predpokladu, že poznáme definičný obor D_σ . Tiež sme vyslovili hypotézu, že ∂H nám v rovine ρ oddelí také C , ktoré patria do H od tých, ktoré tam nepatria. Nikde sme však zatiaľ nepopísali, ako na základe ∂H určíme H .

Ako sme spomínali v časti 3.5.2, ∂H sa skladá z viacerých kriviek ∂H_i a teda aj hľadaná oblasť H sa bude skladat' z viacerých oblastí H_i .

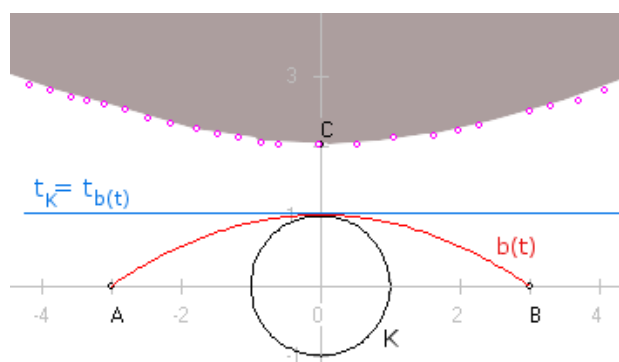
Jedna z možností je vziať z každej oblasti bod C_0 a zistiť, či $b_{AC_0B}(t)$ a K majú spoločný bod. Ak áno, oblasť nevyhovuje požadovaným kritériám. Ak nemajú spoločný bod, táto oblasť je hľadanou oblasťou takých bodov C , že $b_{ACB}(t)$ je priestorová.

Iná možnosť je skúmať, či daná hranica ∂H je z takých bodov C , že $b_{ACB}(t)$ sa dotýka K zvonku ($b_{ACB}(t)$ a K sú až na bod dotyku navzájom oddelené ich spoločnou dotyčnicou) alebo zvnútra ($b_{ACB}(t)$ a K nie sú navzájom oddelené ich spoločnou dotyčnicou). Rozlíšme teda dva prípady:

1. nech ∂H je z takých bodov C , že $b_{ACB}(t)$ sa dotýka K zvonku, obr. 9. Teda $b_{ACB}(t)$ a K sú oddelené ich spoločnou dotyčnicou. Nech ∂H rozdelí ρ na dve polroviny H_1 a H_2 . Vyhovujúca je tá H_i ($i \in \{1, 2\}$), ktorá neobsahuje A, B . Keby sme C posúvali smerom k A, B , dôjde k prieniku $b_{ACB}(t)$ a K .



Obr. 9: Ak sú $b_{ACB}(t)$ a K oddelené ich spoločnou dotyčnicou, hľadaná oblasť obsahuje body A, B .

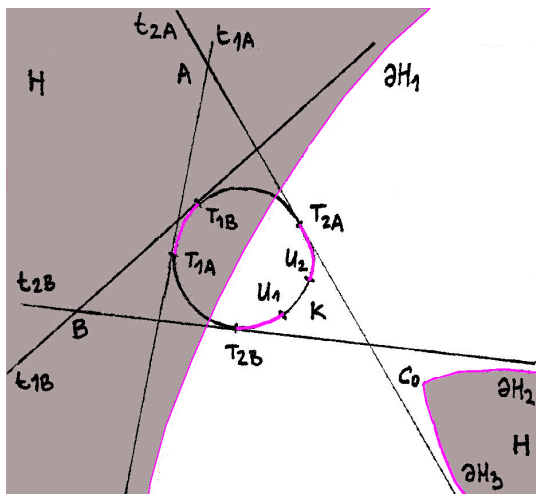


Obr. 10: Ak $b_{ACB}(t)$ a K nie sú oddelené ich spoločnou dotyčnicou, hľadaná oblasť neobsahuje body A, B .

priestorová, je tá, ktorá obsahuje body A, B . Oddel'ujúca nadrovina nám totižto hovorí, že Bézierova krivka (a teda bod C) sa môžeme posúvať len smerom k A, B . Keby sme C posúvali opačným smerom, dôjde k prieniku $b_{ACB}(t)$ a K .

2. nech ∂H je z takých bodov C , že $b_{ACB}(t)$ sa dotýka K zvnútra, obr. 10. Teda $b_{ACB}(t)$ a K nie sú oddelené ich spoločnou dotyčnicou. Nech ∂H rozdelí ρ na dve polroviny H_1 a H_2 . Vyhovujúca je tá H_i ($i \in \{1, 2\}$), ktorá neobsahuje A, B . Keby sme C posúvali smerom k A, B , dôjde k prieniku $b_{ACB}(t)$ a K .

D_σ sa skladá z viacerých oblúkov a preto zobrazením σ dostaneme viac kriviek $\partial H_1, \dots, \partial H_k$. V prípade, že hraničné body oblúkov tvoria aj body U_i , niektoré ∂H_i na seba nadväzujú (majú spoločný bod, v ktorom sú C^0 spojitě). Ak ∂H_i a ∂H_j na seba nadväzujú, urobíme ich zjednotenie a odteraz ich budeme brať ako jednu krivku (obr. 11). Pôvodná množina kriviek $\partial H_1, \dots, \partial H_k$ sa tak zredukuje na krivky, ktoré sa navzájom nepretínajú. Potom oblasť



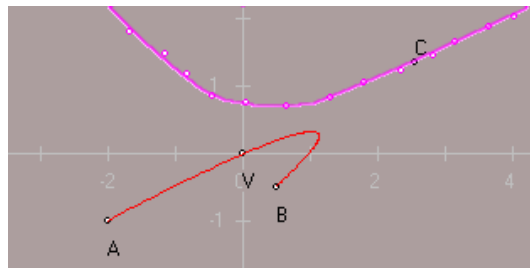
Obr. 11: D_σ sa skladá z troch intervalov. Hranice ∂H_2 a ∂H_3 na seba nadväzujú v bode C_0 .

riešení hľadáme postupne. Pre každú krivku ∂H_i určíme časť roviny H_i , ktorá je riešením a výsledná H je zjednotením týchto čiastkových riešení.

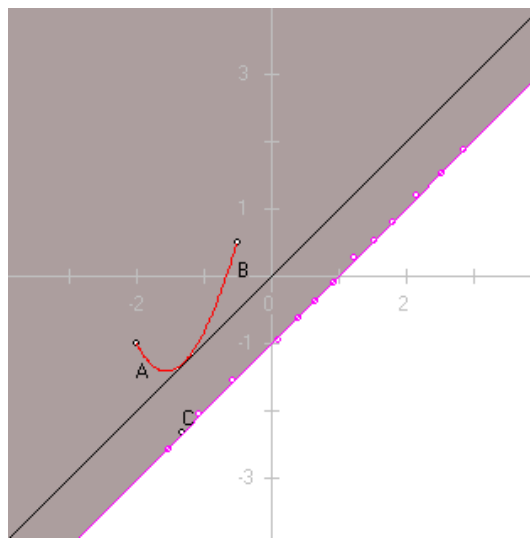
3.5.4 Špeciálne prípady K

V predchádzajúcich úvahách sme spomínali existenciu špeciálnych prípadov, keď K je bod, priamka alebo dve priamky. Pod' me teda určiť, ako pre ne vyzerá ∂H v $S_\rho(O, x, y)$ a následne aj oblasť riešenia H .

1. nech $K = \{V\}$, kde $V = [0, 0, 0] \in \mathbb{R}_1^3$ je vrchol svetelného kužeľa. Nech $V = [v_x, v_y]$ v $S_\rho(O, x, y)$. Jediným obmedzením aby bola $b_{ACB}(t)$ priestorová je, že $V \notin b_{ACB}(t)$. Hľadaná podmienka pre bod C je $C \in \rho \setminus \partial H$, pričom ∂H je taká množina, že ak $C \in \partial H$, potom $V \in b_{ACB}(t)$. Ako vyzerá ∂H zistíme z rovníc (5) a (6). Platí, že $\partial H = \{[c_x, c_y] \text{ z (5) a (6), kde } [x_0, y_0] = [v_x, v_y] \text{ a } t_0 \in (0, 1)\}$, lebo $D_\sigma = \{V\}$, obr. 12. V prípade, že A, B, V sú kolinéarne, $\partial H = \overleftrightarrow{AB}$.
2. nech $K : Dx + Ey + F = 0$, čiže ρ je dotykovou rovinou k svetelnému kužeľu. Môžeme predpokladať, že $K : -x + y = 0$ v $S_\rho(O, x, y)$, keďže tento systém môžeme voliť ľubovoľne. Tu vystupujú doplnujúce podmienky k podmienkam (1) a (2) pre body A, B . Ak totiž body $A = [a_x, a_y], B = [b_x, b_y]$ ležia v rôznych polrovinách vzhľadom na K , taký bod C , že $b_{ACB}(t)$ je



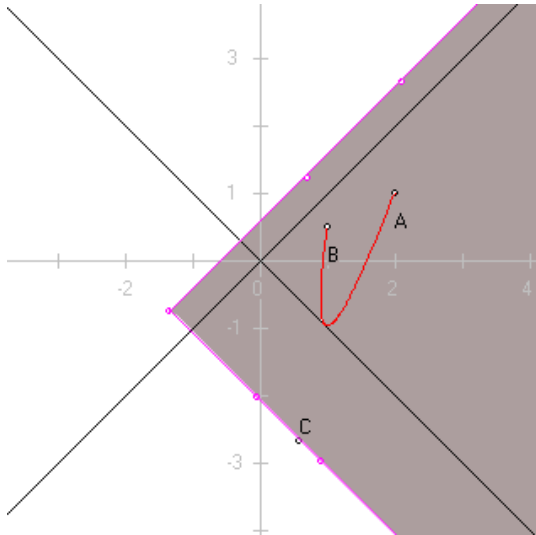
Obr. 12: Špeciálny prípad: Kužeľ'osečku tvorí jeden bod $K = \{V\}$, kde $V = [0, 0]$.



Obr. 13: Špeciálny prípad: $K : Dx + Ey + F = 0$.

priestorová neexistuje. Nech A, B ležia v jednej polrovine vzhľadom na K . Hranica $\partial H = \{[c_x, c_y] \text{ z (5) a (6), kde } D_\sigma = K \text{ a } A, B, C, D = 0\}$. Hľadaná oblasť H je tá polrovina určená krivkou ∂H , v ktorej leží K . Keďže $[x_0, y_0] \in K$, tak $x_0 = y_0$. Z toho dostaneme v rovnici (7), že $t_0 = konst$. Potom $c_y - c_x = \frac{y_0 - a_y(1-t_0)^2 - b_y t_0^2}{2t_0(1-t_0)} - \frac{x_0 - a_x(1-t_0)^2 - b_x t_0^2}{2t_0(1-t_0)} = konst$ a teda množina ∂H je priamka rovnobežná s K , pozri obr. 13.

3. nech $K = \{p \cup q\}$, kde môžeme predpokladať, že $p : -x + y = 0$ a $q : x + y = 0$ v $S_\rho(O, x, y)$, keďže tento systém môžeme voliť ľubovoľne. V predchádzajúcom prípade sme ukázali, že pre priamku r a body A, B je množina $\partial H'_r = \{C : b_{ACB}(t) \cap r = \{T\}\}$ je priamka rovnobežná s r (vypočítaná presne z rovníc (5) a (6)). Hranica ∂H bude určená takýmito priamkami $\partial H'_p$ a $\partial H'_q$, kde $\partial H'_p$ je rovnobežná s p a $\partial H'_q$ je rovnobežná s q . Bod $C_0 = \partial H'_p \cap \partial H'_q$ je taký, že $b_{AC_0B}(t)$ sa dotýka aj priamky p aj priamky



Obr. 14: Špeciálny prípad: $K = \{p \cup q\}$.

q . Body $T_p = b_{AC_0B}(t) \cap p$ a $T_q = b_{AC_0B}(t) \cap q$ určujú definičný obor D_σ . Platí, že $D_\sigma = \overrightarrow{T_p X} \cup \overrightarrow{T_q X'}$, kde polpriamka $\overrightarrow{T_p X} \subset p$, polpriamka $\overrightarrow{T_q X'} \subset q$ a $[0,0] \notin \overrightarrow{T_p X}$, $[0,0] \notin \overrightarrow{T_q X'}$. Hľadanou oblasťou H je tá polrovina určená krivkou ∂H , v ktorej leží bod $[0,0]$, obr. 14. V tomto prípade tiež vystupujú doplnujúce podmienky k podmienkam (1) a (2) pre body A, B . Ak totiž A, B ležia v opačných polrovinách vzhľadom na svetelný kužeľ, úloha nemá riešenie.

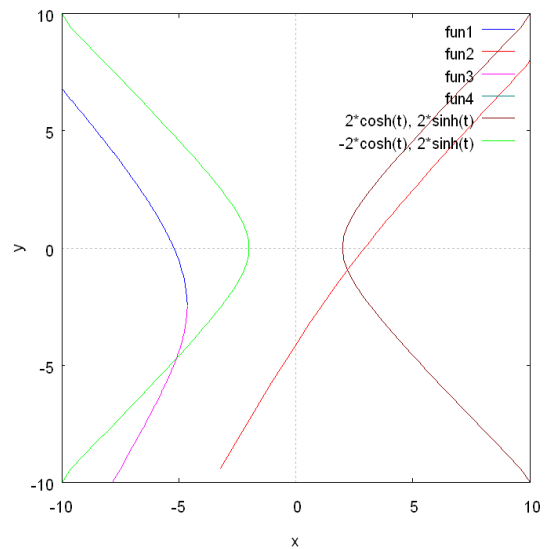
3.5.5 Porovnanie výsledkov CAS Maxima - Experiment

Obrázky 15, 16, vznikli pre porovnanie výsledkov nájdených experimentálne a výsledkov využívajúcich vzťahy (5) a (6). Definičný obor D_σ bol určený pokusne a následne bol zobrazený zobrazením σ .

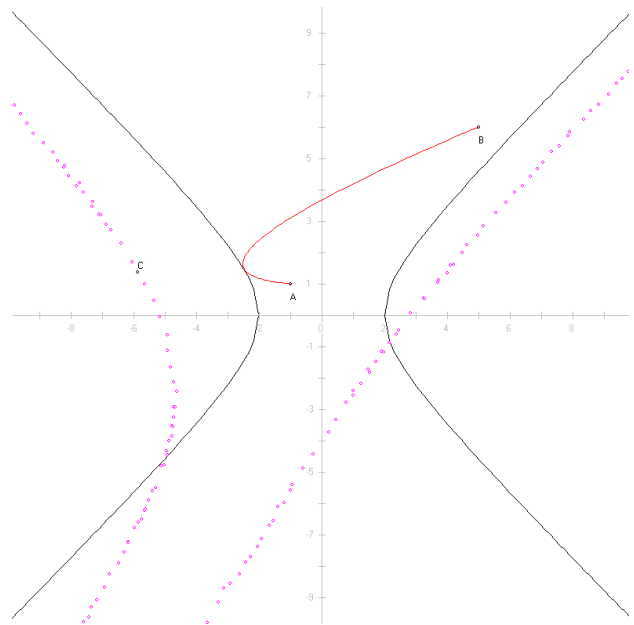
4 Vyhodnotenie výsledkov

Pre začiatkový a koncový riadiaci vrchol sa podarilo odvodiť nutné podmienky (1) a (2). Na hľadanie podmienok pre stredný riadiaci vrchol sme priestorový problém previedli na problém rovinný. Potom nasledovali tri rôzne prístupy k vyriešeniu rovinného problému. Nasleduje zhrnutie každého prístupu k nájdeniu riešenia.

Zhrnutie analytického prístupu: Síce sme odvodili nutné a zároveň postačujúce podmienky pre



Obr. 15: Výstup z programu CAS Maxima.



Obr. 16: Výstup programu Experiment.

stredný riadiaci vrchol, avšak sa nedajú prakticky použiť. Všeobecné vyjadrenie koreňov t_1, \dots, t_4 totiž poskytlo výrazy, z ktorých nevieme vyjadriť podmienky na praktické použitie. Ďalší možný prístup je, na podmienku $t \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \setminus [0, 1])$ skúsiť aplikovať Descartovo znamienkové pravidlo alebo Budan-Fourierovu vetu. Tieto hovoria o počte reálnych koreňov polynómu. Skúsili by sme ich aplikovať na polynóm 3. Keďže jeho koeficienty obsahujú len parametre kužeľosečky a súradnice

bodov A, B, C , možno by sme získali zaujímavé podmienky pre bod C .

Zhrnutie prístupu iteratívneho algoritmu:

Týmto prístupom sme sa snažili pre daný bod C určiť, či $b_{ACB}(t)$ je priestorová, bez použitia aplikácie, ktorá by presne vypočítala korene polynómu štvrtého stupňa. Rozhodovací algoritmus, ktorý sme popísali, pracuje rekurzívne a to je náročné na pamäť. Napriek tomu, že algoritmus je konečný, nevieme dopredu povedať, koľkokrát treba pre-rozdeliť Bézierovu krivku, aby pre každý segment existovali oblasti $K_i(A, B)$. Výhodou je, že tento algoritmus je jasný a riešiteľný. Nesmieme ešte zabudnúť, že sme pracovali len s takými bodmi A, B , že z každého existovali dve dotyčnice ku K , čo nám niektoré body vylúčilo. Otázkou ostáva, či sa dá na základe tohto algoritmu nájsť explicitná podmienka pre súradnice C .

Zhrnutie prístupu hľadania dotyku rádu 1:

Na základe experimentálneho pozorovania sme sa snažili popísať oblasť takých bodov C , že $b_{ACB}(t)$ je priestorová. Vyslovili sme hypotézu o existencii hranice tejto oblasti. Túto hranicu sme sa snažili určiť pomocou zobrazenia σ a jeho definičného oboru D_σ . Zobrazenie σ sme presne určili rovnicami (5) a (6). Avšak nepodarilo sa nájsť presné vyjadrenie D_σ . Opísali sme len faktory, ktoré D_σ ovplyvňujú. V pokusoch sme zatiaľ pozorovali, že D_σ sa môže skladať z jedného až štyroch oblúkov z K . Takto získané ∂H_i nám rozdelili rovinu na niekoľko oblastí H_i . Určili sme rozhodovacie pravidlo na vybratie tých H_i , ktoré tvoria výslednú hľadanú oblasť H . Nesmieme ešte zabudnúť, že sme pracovali len s takými bodmi A, B , že z každého existovali dve dotyčnice ku K , čo nám niektoré body vylúčilo.

Bola snaha vyjadriť krivku ∂H pomocou všeobecnej rovnice. Za predpokladu, že je to krivka štvrtého stupňa (v premennej x a y), stačilo vziať pätnásť bodov krivky ∂H (ktoré vieme presne vypočítať) a určiť pomocou sústavy rovníc jej všeobecný predpis. Program CAS Maxima však takýto systém presne zrátať nedokázal. Dal sa zrátať iba približne, ak sme jednotlivé koeficienty v sústave vopred zaokrúhlili pomocou funkcie *float()*.

Toto rovinné riešenie nám asi najviac priblížilo ako budú vyzeráť postačujúce podmienky pre stredný riadiaci vrchol Bézierovej krivky.

5 Záver

Cieľom tejto práce bolo nájsť podmienky pre riadiace vrcholy Bézierovej krivky v trojrozmernom Minkovského priestore tak, aby bol každý jej bod priestorový. V práci sme pracovali s krivkou druhého stupňa.

Podarilo sa odvodiť nutné podmienky pre začiatkový a koncový riadiaci vrchol krivky. Podmienky pre stredný riadiaci vrchol (v závislosti od krajných bodov) sa podarilo určiť čiastočne, pričom v niektorých špeciálnych prípadoch úplne. V predchádzajúcej kapitole bolo spomenuté, ako sa dá ďalej vo výskume pokračovať.

Súčasťou práce je aplikácia, ktorá jednak pomohla odhaliť vzťahy medzi objektami a tiež slúži ako dobrý vizualizačný nástroj na ozrejenie pojmov a znázornenie situácií pre rôzne polohy Bézierovej krivky. Práca obsahuje aj spustiteľné príkazy CAS Maxima. Tieto presne vykresľujú hranice takých oblastí, že ak stredný riadiaci vrchol patrí oblasti, Bézierova krivka bude priestorová.

V budúcnosti by sa dala aplikácia rozšíriť na zobrazovanie situácie v trojrozmernom priestore, pričom by sa umožnilo vykresliť naraz viac rovinných rezov. Tiež sa dá úloha riešiť pre krivky vyššieho stupňa. Odlišnosť bude v tom, že tieto krivky už neležia v rovine.

Literatúra

- [Cha09] P. Chalmovianský. Modelovanie kriviek pre CAGD - učebné texty. Osobná stránka: <http://www.sccg.sk/~chalmo>, 2009.
- [DFN91] B., A. Dubrovin, A., T. Fomenko, and S., P. Novikov. *Modern Geometry - Methods and Applications: Part I: The Geometry of Surfaces, Transformation Groups, and Fields*. Springer, 2nd edition, 1991.
- [Geo08] M. Georgiev, editor. *Space-like Bézier Curves in the three-dimensional Minkowski Space*, volume 1067. AIP Conference Proceedings, 2008.
- [KJ06] J. Kosinka and B. Jüttler. Cubic helices in Minkowski space. *Sitzungsber. Österr. Akad. Wiss., Abt. II*, 215:13–35, 2006.
- [Nk87] M. Noga and kolektív. *Teória relativity*. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského, Bratislava, 1987.
- [Zla09] P. Zlatoš. Úvod do špeciálnej teórie relativity - učebné texty. Url: <http://thales.doa.fmph.uniba.sk/zlatos/la/leto16.pdf>, 2009.