

Inovatívne vyučovanie stereometrie s využitím 3D pera

Barbora Pokorná Martina Bátorová

Katedra algebry a geometrie, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky,

Univerzita Komenského v Bratislave

barbora.pokorna@fmph.uniba.sk martina.batorova@fmph.uniba.sk

Abstrakt. Príspevok prezentuje výsledky výskumu poukazujúce na významné prínosy využívania 3D pier vo vyučovaní stereometrie. Zároveň opisuje implementáciu práce s 3D perom do prípravy budúcich učiteľov matematiky na FMFI UK s cieľom rozvíjať ich zručnosti pri tvorbe trojrozmerných modelov využiteľných vo výučbe geometrie. Účastníci pracovnej dielne sa oboznámili s didaktickými prínosmi tohto nástroja pri vyučovaní rovinných rezov kocky a v rámci praktickej činnosti si podľa pripravených šablón vytvorili vlastné trojrozmerné modely.

1 Úvod

Východiskovým teoretickým rámcom pre využívanie 3D pier vo vyučovaní matematiky je konštrukcionizmus, formulovaný Papertom, ktorý zdôrazňuje, že poznanie vzniká prostredníctvom aktívnej interakcie jednotlivca s materiálnym svetom [Papert, Harel, 1991]. Prístup označovaný ako „learning-by-making“ predpokladá, že žiaci si počas tvorivej činnosti nielen osvojujú nové vedomosti, ale zároveň vytvárajú hmatateľné artefakty, ktoré môžu zdieľať a reflektovať. Tento prístup úzko súvisí s konceptom vteleného poznávania (embodied learning), podľa ktorého je učenie efektívnejšie, ak zahŕňa telesnú aktivitu, manipuláciu s objektmi a senzorickú skúsenosť [Hall, Nemirovsky, 2012]. Napriek týmto zisteniam však tradičné vyučovanie matematiky často neposkytuje dostatok príležitostí na takýto typ učenia.

V oblasti geometrie sa táto absencia praktickej aktivity a tvorivej interakcie s rôznymi reprezentáciami geometrických objektov prejavuje najmä pri práci s trojrozmernými objektmi, ktoré sú vo vyučovaní často prezentované prostredníctvom ich dvojrozmerných zobrazení. Pre mnohých žiakov je však náročné vytvoriť si na základe takýchto reprezentácií adekvátny mentálny model priestoru [Kudličková et al., 2025]. Práve moderné technológie, ako sú 3D tlač a 3D perá, prinášajú nové možnosti, ako tento problém prekonať keďže umožňujú praktické zapojenie viacerých zmyslov, napr. prepojenie zraku a hmatu. Komplexnejší pohľad na túto problematiku prináša viacročný výskumný program [Ng, Ye, 2022], ktorý zdôrazňuje, že 3D perá podporujú aktívne učenie, kreativitu a schopnosť riešiť problémy. Žiaci pri práci s týmto nástrojom nie sú pasívnymi príjemcami informácií, ale aktívnymi tvorcami matematických modelov a to priamo v pôvodnom trojrozmernom priestore, nielen jeho špecifického obrazu (zvyčajne) vo voľnom rovnobežnom premietaní. Tento prístup vedie k lepšiemu prepojeniu medzi abstraktnými pojmami a ich konkrétnou reprezentáciou a náležitému budovaniu priestorovej predstavivosti a korektných predstáv o polohových a metrických vzťahoch medzi geometrickými objektami.

Osobitná pozornosť bola vo výskume venovaná úlohe gest, pohybu a kreslenia v procese matematického myslenia. Ng a Sinclair [Ng, Sinclair, 2018] ukazujú, že kreslenie je úzko prepojené s pohybom ruky, ktorý má nielen komunikačnú, ale aj kognitívnu funkciu. 3D pero tento vzťah

ešte rozširuje, pretože umožňuje „kresliť v priestore“ a premieňať gestá priamo na trojrozmerné objekty. Významný príspevok predstavuje aj výskum zameraný na využitie 3D pier pri vyučovaní stereometrie. Ng a Ferrara [Ng, Ferrara, 2020] navrhli vyučovacie aktivity, v ktorých žiaci skúmali vlastnosti hranolov, ihlanov a rezov telies pomocou 3D pier v kombinácii s fyzickými modelmi. Takéto prostredie umožňuje žiakovi priamo pozorovať a manipulovať s geometrickými javmi, čo podporuje proces matematizácie a objavovania. Porovnanie rôznych technologicky podporovaných prístupov prináša štúdia [Ng et al., 2020], ktorá analyzuje rozdiely medzi využitím 3D pier a dynamických geometrických prostredí. Zistenia ukazujú, že zatiaľ čo digitálne nástroje (napr. GeoGebra) podporujú rýchlejšie pochopenie a lepšie okamžité výsledky, práca s 3D perami vedie k dlhodobějšímu uchovaniu vedomostí.

Praktické využívanie 3D pera vo vyučovaní geometrie bolo na FMFI UK overované aj prostredníctvom záverečných prác študentov rozširujúceho štúdia matematiky, ktoré sú bližšie spracované v [Pokorná, 2025²]. Jedna z prác sa venovala problematike rovinných rezov telies, ďalšia uchopeniu metrických vlastností geometrických útvarov, kde fyzické modely pomáhali žiakovi prepájať výpočty s konkrétnou priestorovou reprezentáciou. Tretia z prác sa zameriavala na zobrazovanie telies vo voľnom rovnobežnom premietaní na ZŠ.

Celkovo možno konštatovať, že existujúci výskum poukazuje na významný potenciál 3D pier ako didaktického nástroja. Ich využitie podporuje rozvoj priestorovej predstavivosti, hlbšie porozumenie geometrickým konceptom a aktívne, konštruktivisticky orientované učenie.

2 3D pero

3D pero predstavuje ručný nástroj podobný väčšiemu plniacemu peru, ktorý namiesto atramentu extruduje roztavený plastový filament, ktorý na vzduchu rýchlo tuhne (obr. 1). Vďaka tomu umožňuje vytvárať nielen dvojrozmerné kresby, ale aj priestorové objekty priamo na podložke alebo vo voľnom priestore.



Obr. 1: 3D pero spolu s farebnými filamentmi používanými na tvorbu modelov.

Z technického hľadiska sú 3D perá najčastejšie napájané cez USB a ovládajú sa pomocou tlačidiel regulujúcich extrúziu materiálu. Modernjšie zariadenia sú vybavené LCD displejom, ktorý umožňuje sledovať a nastavovať teplotu hrotu aj rýchlosť posuvu filamentu. Maximálna teplota hrotu je pritom rozhodujúcim parametrom, keďže určuje kompatibilitu s rôznymi typmi fila-

mentov. Pri výbere zariadenia je vhodné zohľadniť aj ďalšie faktory, ako sú plynulosť extrúzie, stabilita výstupu, ergonomický dizajn, spoľahlivosť zariadenia, dĺžka napájacieho kábla či možnosť výmeny hrotov. Niektoré modely navyše umožňujú prepojenie so smartfónom prostredníctvom technológie Bluetooth, čo rozširuje ich využitie o aplikácie ponúkajúce šablóny, návody a interaktívne postupy.

3 Integrácia 3D pier do výučby geometrie v príprave budúcich učiteľov matematiky

Vzhľadom na uvedené benefity používania 3D pier vo výučbe sme sa rozhodli naučiť budúcich učiteľov matematiky používať tento nástroj. Hlavným cieľom bolo nielen oboznámiť študentov s technickým používaním 3D pera, ale najmä posilniť ich dôveru v jeho didaktické využitie prostredníctvom praktickej skúsenosti. Vychádzali sme z predpokladu, že aktívne zapojenie študentov a možnosť samostatnej práce s pomôckou výrazne zvyšujú pravdepodobnosť jej budúceho využitia v pedagogickej praxi.

Úvodného testovania sa zúčastnilo 20 študentov 3. ročníka bakalárskeho študijného programu učiteľského štúdia v aprobáciách matematika – ďalší (prírodovedný) predmet na Fakulte matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave v zimnom semestri akademického roka 2025/26. Väčšina z nich nemala s 3D perom ani podobným nástrojom praktickú skúsenosť. Pre účely práce s 3D perom sme sa rozhodli zamerať na tému rovinných rezov telies, nakoľko táto problematika patrí medzi konceptuálne náročnejšie oblasti geometrie.

Výuku sme rozdelili na dve fázy. V prvej časti (90 min.) študenti riešili konštrukcie rovinných rezov telies klasicky – rysovaním na papieri, pričom využívali základné pravidlá, ktoré sa bežne učia na SŠ. Tento prístup však vyžaduje dobre rozvinutú priestorovú predstavivosť, čo sa ukázalo ako problém, najmä pri zložitejších situáciách, keď bolo potrebné konštruovať pomocnú rovinu.



Obr. 2: Študenti si prácu s 3D perom nacvičili vytváraním modelov znázorňujúcich rôzne rovinné rezy kocky.

Druhá časť výučby (90 min.) bola zameraná na použitie 3D pera. Študenti najskôr videli ukážku práce a následne sami vytvárali modely rezov kocky (obr. 2). Väčšine z nich stačila jednoduchá praktická inštrukcia, po ktorej boli schopní pracovať samostatne a vytvoriť funkčný a na bežnú manipuláciu stabilný 3D model kocky spolu s jej rezom. Pracovali vo dvojiciach, čo sa uká-

Dôležitou súčasťou bol aj individuálny semestrálny projekt. Študenti si sami vybrali referenčné teleso a rovinu rezu, ktorú definovali tromi bodmi. Potom riešili konštrukciu rezu klasicky na papieri. Potom pomocou analytickej geometrie presne vypočítali rozmery rezu a vytvorili šablónu pre tvorbu fyzického modelu v mierke 1:1. Tento proces prepájal rôzne oblasti geometrie a zároveň rozvíjal schopnosť navrhovať vlastné úlohy, čo je kľúčová kompetencia budúcich učiteľov.

A collection of approximately ten handcrafted geometric objects, including cubes, pyramids, and prisms, made from woven straw or reed. The objects are painted in various colors like black, yellow, red, green, blue, pink, orange, and purple. They are arranged on a light-colored wooden surface.

4 Pracovná dielňa zameraná na výrobu modelov

Na úvod boli účastníci oboznámení s teoreticko-didaktickými východiskami a cieľmi navrhovanej aktivity, pričom bol akcentovaný význam manipulácie s konkrétnymi objektmi a rozvoja priestorovej predstavivosti v kontexte výučby stereometrie na základných a stredných školách. Napriek tomu, že išlo o účastníkov z Českej republiky, ponúknutý výsek učiva bol pre nich relevantný, keďže ide o základy stereometrie, a tie (nielen) Slovensko a Česko s veľkým prekryvom zdieľa.

Tvorivá dielňa v rozsahu 70 minút sa opierala o využitie pripravených šablón a predchádzajúcimi skúsenosťami optimalizovaný proces tvorby 3D modelov, ktorý je krok za krokom uvedený v [Pokorná, 2025]. Po stručnej úvodnej inštruktážnej časti boli účastníci schopní pracovať individuálne alebo v kooperujúcich dvojiciach (obr. 4), pričom počas realizácie mali možnosť priebežných konzultácií, kladenia otázok a komparácie čiastkových výsledkov buď medzi sebou, alebo s nami autorkami.

Počas práce vznikli aj úsmevné a náladu odľahčujúce situácie, kedy samotní učitelia matematiky robili začiatočnícke chyby pri skladaní častí extrudovaného 3D modelu rezu kocky. Týmto sa nám anekdoticky potvrdila relevantnosť výučby problematiky prostredníctvom priamej práce v trojrozmernom priestore bez premietania do roviny, keďže tam sa dostatočným cvikom dá prejsť do manuálneho osvojenia konštrukcie rezu v priemete, ktoré sa už spätne nemusia odzrkadliť v schopnosti korektne pracovať na trojrozmernom modeli.

Vďaka dostatočnej časovej dotácii priebežne a najmä na konci prirodzene vznikol priestor na diskusiu. Zúčastnení učitelia z praxe využili tento čas na reflexiu didaktického potenciálu a možností využitia 3D pera vo výučbe stereometrie. Vďaka vlastnej skúsenosti pozitívne hodnotili efektivitu a podnetnosť takéhoto obohatenia a rozšírenia hodín stereometrie. Ocenili používateľskú prítulnosť a ergonómiu práce s týmto nástrojom, jeho finančnú nenáročnosť, a neformálne diskutovali o ďalších učebných celkoch, kde by sa 3D pero dalo organicky a zmysluplne využiť.



Obr. 4: Účastníci pri praktickej tvorbe priestorových modelov pomocou 3D pera, pri ktorej aplikujú princípy stereometrie a overujú vlastnosti rovinných rezov telies.

5 Záver

Predchádzajúce skúsenosti z vysokoškolského prostredia a veľmi pozitívna skúsenosť z konferencie *Dva dny s didaktikou matematiky* nás naďalej motivujú zamerať sa na hlbšie preskúmanie možností zapojenia 3D pera do výučby na rôznych stupňoch vzdelávania, so špeciálnym akcentom na vzdelávanie a prípravu budúcich učiteľov matematiky. V našej ďalšej práci by sme radi podrobnejšie venovali tejto oblasti a už pomocou rigoróznejších metód pedagogického výskumu lepšie rozvinuli a preskúmali prezentovanú problematiku.

6 Pod'akovanie

Táto práca bola podporená grantom KEGA č. 038UK-4/2024 realizovaným na Univerzite Komenského v Bratislave.

Literatúra

- [Hall, Nemirovsky, 2012] Hall, R., Nemirovsky, R. *Modalities of body engagement in mathematical activity and learning [special issue]*, Journal of the Learning Sciences, 21(2), s. 207–215, 2012.
- [Kudličková et al., 2025] Kudličková, S., Bátorová, M., Mackovová, A. *Tradičné a inovačné rozvíjanie priestorovej predstavivosti*, Univerzita Komenského v Bratislave, 2025. [Online:] https://stella.uniba.sk/texty/FMFI_KBM_rozvijanie_priestorovej_predstavivosti.pdf
- [Ng, Sinclair, 2018] Ng, O.-L., Sinclair, N. *Drawing in Space: Doing Mathematics with 3D Pens*, In: Uses of Technology in Primary and Secondary Mathematics Education, ICME-13 Monographs, Springer, Cham, 2018.
- [Ng, Ferrara, 2020] Ng, O.-L., Ferrara, F. *Towards a Materialist Vision of 'Learning as Making': the Case of 3D Printing Pens in School Mathematics*, International Journal of Science and Mathematics Education, 18, s. 925–944, 2020.
- [Ng, Ye, 2022] Ng, O.-L., Ye, H. *Doing Mathematics with 3D Pens: Five Years of Research on 3D Printing Integration in Mathematics Classrooms*, In: Learning Mathematics in the Context of 3D Printing, Springer Spektrum, s. 143–162, 2022.
- [Ng et al., 2020] Ng, O.-L., Shi, L., Ting, F. *Exploring differences in primary students' geometry learning outcomes in two technology-enhanced environments: dynamic geometry and 3D printing*, International Journal of STEM Education, Springer, 2020.
- [Papert, Harel, 1991] Papert, S., Harel, I. *Situating Constructionism*, In: Papert, S., Harel, I. (eds.), Constructionism, Ablex, s. 1–11, 1991.
- [Pokorná, 2025] Pokorná, B. *Výučba stereometrie pomocou 3D pera*, Dva dni s didaktikou matematiky 2025, s. 74–81, online, 2025.
- [Pokorná, 2025²] Pokorná, B. *3D pen-supported geometry learning in secondary schools*, In: Proceedings of the 11th Slovak-Czech Conference on Geometry and Graphics, s. 141–148, Vydavateľstvo SCHK, 2025.