

# VÝUČBA STEREOMETRIE POMOCOU 3D PERA

BARBORA POKORNÁ

**ABSTRAKT.** *Príspevok prezentuje výsledky výskumu poukazujúceho na významné prínosy využívania 3D pier vo vyučovaní stereometrie. Zároveň predstavuje novovytvorené učebné materiály určené na prácu s 3D perom v triede. Účastníci pracovnej dielne sa oboznámili s didaktickými výhodami použitia 3D pera pri vyučovaní rovinných rezov kocky a v rámci praktickej aktivity si podľa pripravených šablón sami vytvorili vlastné trojrozmerné modely.*

## Úvod

Koncepcia konštrukcionizmu (Papert [1]) hovorí, že poznanie sa vytvára prostredníctvom aktívneho kontaktu človeka s materiálnym svetom. Učenie „learning-by-making“ teda znamená, že žiaci si počas tvorivej činnosti nielen rozvíjajú nové vedomosti, ale zároveň vytvárajú hmatateľné objekty, ktoré môžu zdieľať s ostatnými. Psychologické výskumy poukazujú na to, že taktilno-kinestetické metódy učenia sú pre žiakov mimoriadne účinné. Učenie je obzvlášť efektívne, keď zahŕňa pozorovanie, meranie a manipuláciu s fyzickými objektmi – prístup označovaný ako „vtelené poznávanie“, tzv. embodied learning (Hall and Nemirovsky [2]). Napriek tomu súčasná školská prax často poskytuje len málo príležitostí na takéto aktivity.

Štúdium vlastností trojrozmerných objektov a ich vzájomných vzťahov často prebieha až po premietnutí do roviny, teda na ich dvojrozmerných obrazoch. Pre niektorých žiakov však takéto dvojrozmerné obrazy nevyvolávajú adekvátny mentálny model zodpovedajúceho trojrozmerného objektu. Rastúca dostupnosť 3D tlačových technológií, ako sú 3D tlač alebo 3D perá, prináša nové príležitosti vo vyučovaní trojrozmernej geometrie a môže napomôcť tejto skupine žiakov zdokonaľiť vnímanie 3D objektov.

Tieto technológie poskytujú priamejšiu interakciu s matematickými konceptmi a vytvárajú viac príležitostí na aktívnu konštrukciu poznatkov. Štúdia (Ng and Ye [3]) poukazuje na veľký potenciál 3D tlače v matematickom vzdelávaní, pretože umožňuje žiakom vlastnoručne vytvárať modely v trojrozmernom priestore, namiesto používania hotových pomôcok vytvorených učiteľom. Zverejnené výsledky naznačujú, že využívanie takýchto nástrojov zlepšuje žiakom konceptuálne porozumenie a dlhodobé zapamätanie poznatkov v oblasti priestorovej geometrie.

Výskum (Ng and Sinclair [4]) sa zameriava na úlohu gest a diagramov pri matematickom myslení a učení. Autori tvrdia, že kreslenie je úzko späté s pohybom ruky, ktorý má komunikačnú aj poznávaciu funkciu. 3D pero tento vzťah ešte prehĺbuje, pretože umožňuje „kresliť vo vzduchu“ a premieňať gestá na trojrozmerné objekty, pričom ruka a myšlienkový proces postupujú súčasne. Vytvorené plastické útvary možno chytiť, otáčať a skúmať, čo presahuje možnosti papiera aj obrazovky.

## 3D pero

Nástroj 3D pero je ručné zariadenie pripomínajúce väčšie plniace pero, ktoré netlačí atrament, ale vytlačí roztavený plast (filament), ktorý na vzduchu rýchlo tuhne (obr. 1). Umožňuje kresliť dvoj- aj trojrozmerné objekty priamo na podložku alebo „do vzduchu“. Nápad vznikol okolo rokov 2012–2013 ako praktická odpoveď na opravu chýb 3D tlače a rýchlo sa rozšíril medzi učiteľmi, dizajnérmi či architektmi.

Perá sa najčastejšie napájajú cez USB a ovládajú sa tlačidlami. Pokročilejšie modely majú LCD displej, na ktorom zobrazujú teplotu hrotu, plynulú reguláciu teploty a rýchlosti posuvu filamentu. Kľúčový parameter je maximálna teplota hrotu – určuje kompatibilitu s filamentmi. Dôležité parametre, ktoré treba zvážiť pri kúpe, sú aj rýchlosť extrúzie, stabilita

výtlačku, ergonomický tvar, spoľahlivosť (neupchávanie trysky), dĺžka kábla, výmenné hroty či pripojenie k smartfónu. Pripojenie 3D pera k smartfónu prostredníctvom Bluetooth umožňuje využívať rôzne aplikácie, ktoré poskytujú hotové šablóny, návody a interaktívne postupy.



Obrázok 1: Princíp fungovania 3D pera vychádza z podobného mechanizmu ako pri tavnej pištoli. Ako náplň sa používajú farebné plastové filamente rôzneho zloženia. V súčasnosti je na trhu dostupných viacero značiek v rôznych cenových a funkčných kategóriách. Zdroj: [8], [9].

### Filamenty a ich vlastnosti

Filament je plastová struna, ktorá slúži ako náplň pre 3D pero (obr. 1). Pri jeho výbere je dôležité zohľadniť nielen farbu či hrúbku, ale najmä vlastnosti materiálu, z ktorého je vyrobený, a jeho teplotu tavenia. V domácom alebo školskom prostredí sa najčastejšie používajú dva typy filamentov – PLA a ABS. Každý z nich má špecifické výhody aj obmedzenia, ktoré ovplyvňujú spôsob práce s 3D perom aj výslednú kvalitu modelu.

PLA (kyselina polylaktónová) je materiál vyrábaný z obnoviteľných prírodných zdrojov, najčastejšie z kukuričného alebo zemiakového škrobu. Je biologicky rozložiteľný a pri zahrievaní neuvolňuje nepríjemné pachy, čo z neho robí bezpečnejší a príjemnejší materiál pre použitie v školách, najmä pri práci s deťmi. PLA sa topí pri nižšej teplote (približne 180–220 °C), takže 3D pero určené pre tento filament nemusí dosahovať extrémne vysoké teploty. Vytvára pevné, ale menej pružné modely, ktoré sa môžu pri nadmernom ohýbaní lámať. Tento materiál je vhodný pre tvorbu dekoračných objektov, jednoduchých modelov, geometrických tvarov alebo didaktických pomôcok, ktoré sa nebudú výrazne mechanicky zaťažovať. Veľkou výhodou PLA je aj široká ponuka farieb.

ABS (akrylonitril-butadién-styrén) je pevnejší a odolnejší materiál, ktorý je používaný aj v priemyselnej výrobe, napríklad pri výrobe LEGO kociek. Modely vytvorené z ABS sú tvrdé, menej krehké a lepšie odolávajú nárazom či vyšším teplotám než modely z PLA. Jeho tavenie však vyžaduje vyššiu teplotu (približne 210–250 °C), čo znamená, že nie každé 3D pero je pre tento materiál vhodné. Pri práci s ABS vzniká výrazný zápach a uvoľňujú sa výpary, preto je potrebné zabezpečiť dobré vetranie alebo pracovať v priestore s odsávaním vzduchu. ABS je vhodný na tvorbu modelov, kde je dôležitá vyššia mechanická odolnosť, napríklad pri tvorbe funkčných súčiastok alebo modelov vystavených častej manipulácii.

Pri voľbe medzi PLA a ABS je vhodné zvážiť vek a skúsenosti používateľa, bezpečnostné podmienky a účel vytváraného objektu. Do školského prostredia a na prvé

pokusy je najvhodnejšie PLA, zatiaľ čo ABS ocenia pokročilejší používatelia pri výrobe odolnejších modelov.

### **Využitie 3D pera vo vzdelávaní**

3D pero prináša do vyučovania nové spôsoby tvorby a objavovania poznatkov vo viacerých predmetoch. V hodinách fyziky môžu žiaci vlastnoručne zostavovať modely jednoduchých obvodov alebo zariadení, čo im pomáha lepšie pochopiť ich fungovanie. V chémii umožňuje prehľadne znázorniť molekuly a väzby medzi atómami a v biológii zas vytvoriť modely buniek či orgánov, ktoré sa dajú chytiť do ruky a skúmať. Tvorba reliéfu alebo terénnych modelov na hodinách geografie pomáha žiakom pochopiť, ako sa vytvárajú mapy. Pri technickej výchove alebo inžinierskych aktivitách si žiaci môžu navrhovať a testovať jednoduché prototypy. Vďaka týmto možnostiam sa 3D pero stáva všestrannou pomôckou, ktorá podporuje tvorivosť, priestorovú predstavivosť a zapája do učenia viac zmyslov, čím robí výučbu atraktívnejšou a núti žiakov aktívne sa zapájať do vyučovania.

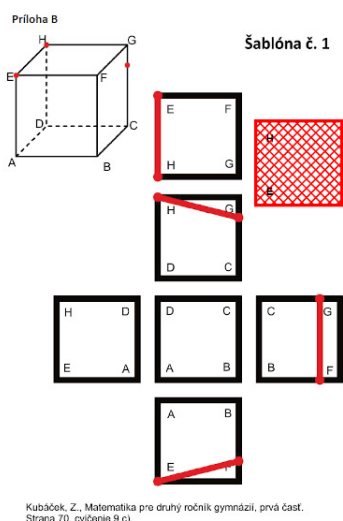
### **Pracovná dielňa zameraná na výrobu modelov znázorňujúcich rovinné rezy kocky**

Pri príprave pracovnej dielne sme vychádzali zo záverečnej práce Redechová [6], ktorej školiteľkou bola autorka príspevku. Práca sa zameriava na inováciu didaktických postupov vo vyučovaní rovinných rezov kocky, ktoré patria k témam, pri ktorých žiaci často zažívajú ťažkosti spojené s predstavou vzájomnej polohy kocky a rezovej roviny. Štandardná výučba sa opiera o rovinné priemety, avšak nie všetci žiaci dokážu z dvojrozmerného náčrtu odvodiť skutočnú priestorovú štruktúru telesa. Práve preto sme vytvorili súbor konštrukčných úloh, ktoré zahŕňajú všetkých šesť základných typov rovinných rezov kocky, pričom sme vychádzali z úloh bežne uvádzaných v aktuálnych učebniciach matematiky pre stredné školy. K týmto úlohám boli vypracované šablóny, pomocou ktorých si žiaci môžu vytvoriť trojrozmerné modely kocky s rezovou rovinou pomocou 3D pera. Fyzická manipulácia s modelom umožňuje žiakom otáčať teleso a porovnávať perspektívy, čo zásadne uľahčuje pochopenie toho, že priamky, ktoré sa v rovine zdajú byť rôznobežkami, sa v priestore nemusia pretnúť, ale môžu byť mimobežkami. Súčasťou práce bol aj metodický návod s postupmi a odporúčaniami pre učiteľov, ako modely efektívne začleniť do vyučovania. V rámci pracovnej dielne si učitelia mohli tieto šablóny aj tvorbu modelov prakticky vyskúšať, čo im poskytlo možnosť reflektovať didaktický potenciál 3D pera priamo prostredníctvom vlastnej skúsenosti.

Účastníkom sme najprv stručne predstavili didaktické východiská a ciele aktivity, pričom sme zdôraznili význam fyzickej manipulácie a priestorovej vizualizácie pri vyučovaní stereometrie. Následne sme im ukázali jednotlivé typy rovinných rezov kocky a krok za krokom sme demonštrovali, ako sa s použitím pripravených šablón tvorí priestorový model. Po úvodnej ukážke pracovali účastníci samostatne alebo v dvojiciach. Počas práce mali možnosť konzultovať postup, pýtať sa, porovnávať medzivýsledky a diskutovať o vhodných stratégiách vedenia žiakov.

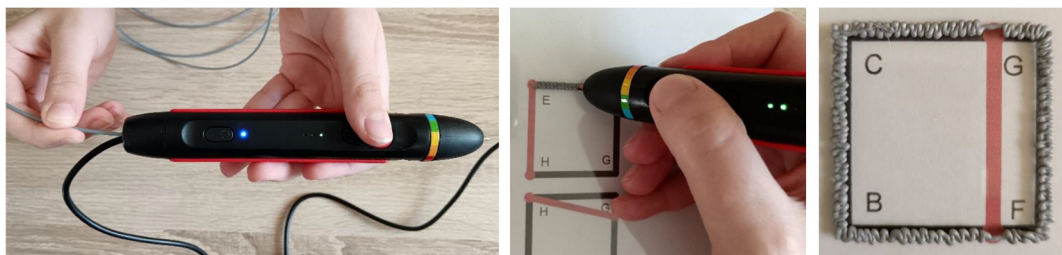
### **Postup tvorby modelu**

Účastníci dostali vopred zalaminovanú šablónu, ktorá slúžila ako pevná podložka pre obťahovanie čiar, a z ktorej sa model po vychladnutí dal ľahko odlepiť (obr. 2). Mohli si vybrať zo šiestich typov šablón podľa toho, aký mnohouholník chceli dostať ako výsledný rez. Účastníci si šablónu uložili na pracovný stôl tak, aby mali dobrý prístup ku všetkým častiam vzoru. Pre lepšiu stabilizáciu bolo možné šablónu prichytiť o stôl lepiacou páskou.



Obrázok 2: Ukážka šablóny na tvorbu modelu znázorňujúceho rovinný rez kocky (vpravo). Naľavo sú zobrazené pracovné pomôcky potrebné pri konštrukcii modelu. Zdroj: [6], str. 63.

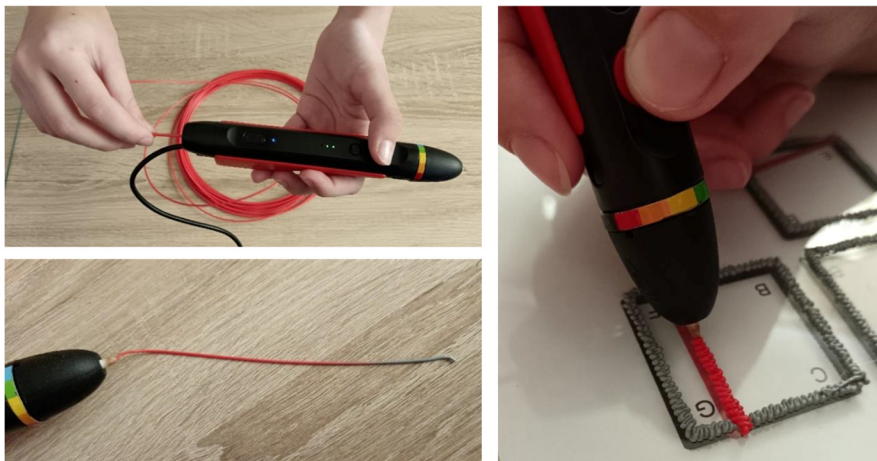
Šablóna obsahuje plášť kocky spolu s naznačenými hranami rezu a mnohoúhelník, ktorý vznikne ako rez zvolenou rovinou. Účastníci si vybrali PLA filamentey dvoch rôznych farieb z ponúkanej palety – jednu farbu na model kocky (napr. sivú), druhú na zvýraznenie samotného rezu (napr. červenú). Tento farebný kontrast zohráva dôležitú úlohu pri následnej interpretácii modelu, keďže žiakom aj učiteľom umožňuje okamžite identifikovať tvar rezu v rámci celej kocky. Po zahriatí pera na potrebnú teplotu zasunuli do horného otvoru pera sivý filament a pridržovali ho, kým si ho pero samo nezačalo vťahovať dovnútra (obr. 3, vľavo). Rýchlosť posuvu filamentu sme odporúčali nastaviť na najnižší stupeň, aby bola práca presná a stabilná. Účastníci začali obťahovať všetky hrany kocky jemným vlnkovým pohybom, ktorý zabezpečil vyššiu pevnosť a stabilitu modelu (obr. 3, vpravo).



Obrázok 3: Filament sa vkladá do 3D pera v hornej časti zariadenia. Pri tvorbe hrán kocky je vhodné viesť ťah pera mierne vlnkovým pohybom, čím sa zabezpečí vyššia pevnosť a stabilita výsledného modelu. Zdroj: [6], str. 65, 66.

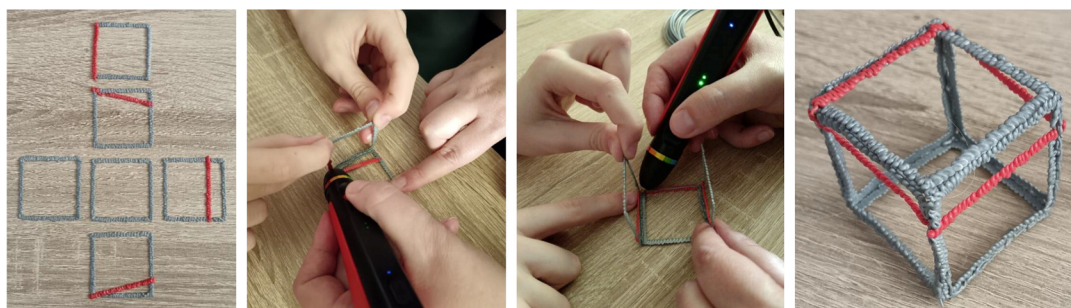
Po dokončení konštrukcie hrán bolo potrebné spustiť spätný chod pera, aby sa mohol sivý filament opatrne vytiahnuť von. Pre opätovné použitie filamentu je potrebné odstrihnúť roztavený koniec nožnicami, pretože do 3D pera môžeme vkladať filament len s rovným zastrihnutým koncom. Následne bolo potrebné obťahovať hrany rezu, ktoré sú na šablónach znázornené červenou farbou. Účastníci zasunuli do pera červený filament. Spočiatku z hrotu ešte vytekala sivá farba, ktorá zostala v tele 3D pera (obr. 4). Túto časť filamentu bolo potrebné nechať odtiecť na okraji šablóny, až kým sa vytekajúci plast

nestabilizoval na červenú. Následne červeným filamentom obkreslili hrany rovinného rezu. Tento krok často viedol k diskusii o tvare a polohe rezu, keďže práve farebné zvýraznenie umožnilo jasne identifikovať vzniknutý mnohouholník (obr. 4).



*Obrázok 4: Pri zmene farby filamentu je potrebné najskôr nechať odtiecť zvyšky pôvodného materiálu, aby sa zabránilo miešaniu farieb. Hrany rovinného rezu sú zvýraznené odlišnou farbou ako hrany kocky, čím sa zlepšuje názornosť a čitateľnosť modelu. Zdroj: [6], str. 67.*

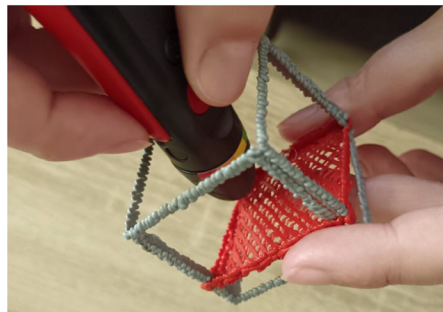
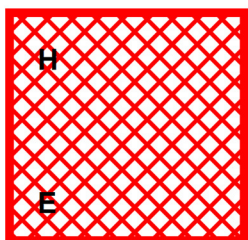
Po vychladnutí plastu účastníci jednotlivé diely jemne odlúpili od šablóny (obr. 5). Následne začali steny kocky spájať pomocou hrotu 3D pera, podobne ako pri práci s tavnou pištoľou. Pri skladaní bolo dôležité zachovať pravé uhly medzi stenami. Na ich dosiahnutie účastníci často využili hranu alebo roh pracovného stola, o ktorý si jednotlivé steny dočasne opreli. Spojenia vytvárali najskôr v rohoch a až potom pozdĺž dlhších styčných hrán. Tým postupne vznikol kompletný priestorový model kocky s vyznačeným rezom (obr. 5).



*Obrázok 5: Po vychladnutí odoberieme jednotlivé steny kocky z pracovnej podložky a následne ich postupne spojíme do výsledného priestorového modelu. Zdroj: [6], str. 67, 68.*

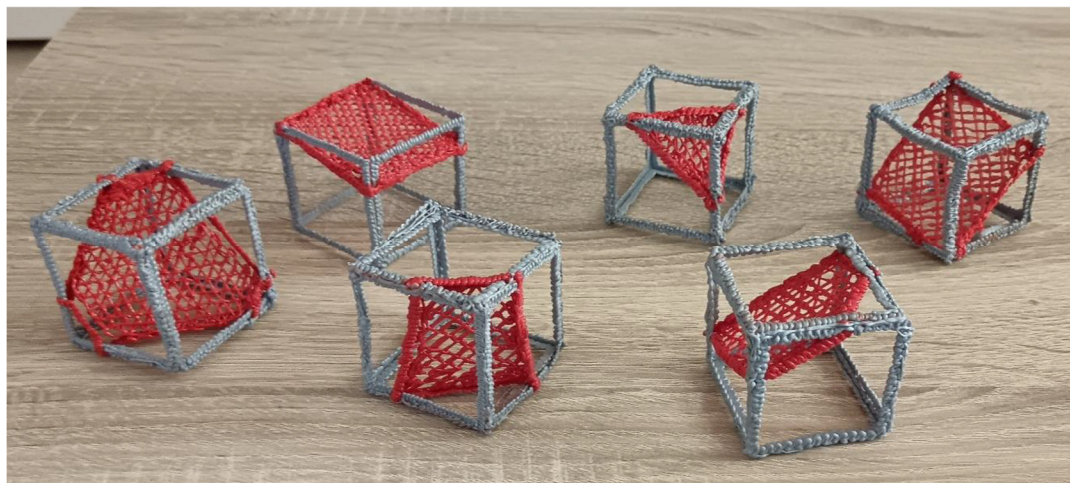
Po zhotovení priestorovej kostry kocky účastníci vytvárali plochu samotného rovinného rezu, aby bol výsledný model kompletne názorný. Najprv si podľa šablóny obkreslili mnohouholník reprezentujúci rovinný rez (obr. 6, vľavo). Tento tvar tvorili tenkou, jemne šrafovanou (vlnovkovou) linkou, aby mal model dostatočnú pevnosť, no zároveň zostal ľahký a presný. Keď plocha rezu stuhla, účastníci ju umiestnili dovnútra kocky – bolo potrebné venovať pozornosť správnej orientácii v priestore, aby jednotlivé strany mnohouholníka zodpovedali úsečkám, ktoré predstavujú rez v jednotlivých stenách kocky

(obr. 6, vpravo). Po kontrole orientácie sa plocha rezu pritavila k hranám rezu (ktoré boli predtým zvýraznené kontrastnou farbou filamentu). Pritavenie prebiehalo postupne po obvodě mnohoúhelníka tak, aby plocha plynulo dosadla na všetky vyznačené hrany a nevznikali medzery. Výsledkom bol uzatvorený, prehľadný model kocky so znázorneným rovinným rezom, ktorý umožňoval uchopenie, otáčanie a vizuálnu analýzu rezu z rôznych uhlov pohľadu.



Obrázok 6: Vľavo je zobrazená podoba rovinného rezu kocky na šablóne. Rez najskôr obťahujeme ťahmi pera so šrafovaním (v strede) a následne hotový diel vložíme do priestorového modelu kocky (vpravo). Pri vkladaní je potrebné dbať na správnu orientáciu rezu, aby vnútro rezu presne zapadlo. Zdroj: [6], str. 68, 69.

Záver workshopu patril reflexii, kde účastníci vyjadrili veľkú spokojnosť s konkrétnosťou, názornosťou aj okamžitou prenositeľnosťou aktivity do vyučovania. Viacerí uviedli, že 3D pero vnímajú ako prístupný a motivujúci prostriedok na oživenie výučby geometrie a požiadali o zaslanie dostupných šablón.



Obrázok 7: Súbor modelov vytvorených 3D perom ilustrujúci rozmanitosť mnohoúhelníkov, ktoré môžu vzniknúť ako rovinné rezy kocky. Účastníci pracovnej dielne pracovali s rovnakými šablónami, aké boli použité pri tvorbe uvedených modelov. Zdroj: [6], str. 69.

## Záver

Výsledky prezentované v tomto príspevku a na pracovnej dielni nadväzujú na širší súbor výskumných aktivít zameraných na integráciu 3D pera do výučby stereometrie na základných a stredných školách. Okrem práce Redechová [6], orientovanej na rovinné

rezy kocky, vznikli v rámci tohto výskumného smerovania aj ďalšie záverečné práce rozvíjajúce problematiku v odlišných tematických celkoch. Piačková [5] je zameraná na podporu rozvoja priestorovej vizualizácie v úlohách analytickej geometrie využívajúcich metrické vzťahy medzi objektami, najmä pri určovaní dĺžok úsečiek a veľkostí uhlov medzi priamkami a rovinami. Vytvorené šablóny umožnili konštrukciu modelov, ktoré následne slúžili na verifikáciu výsledkov meraním pomocou papierového pravítka. Práca Trubačová [7] sa venuje výučbe voľného rovnobežného premietania u mladších žiakov. Pomocou navrhnutých šablón je možné zostaviť jednoduché telesá, ako sú kocka, kváder či ihlan, pričom vyšrafovanie plôch umožňuje jasne odlíšiť viditeľné a skryté hrany – čo pri bežne používaných papierových modeloch nie je možné. Práca zdôrazňuje význam priamej manipulácie s modelmi, keďže hmatová aj zraková skúsenosť podporuje budovanie presných mentálnych predstáv o priestorových vzťahoch. Žiaci tak dokážu lepšie porozumieť rovnobežnosti či kolmosti hrán a rovín, ako aj rozdielu medzi tým, čo vidia (útvár skreslený premietaním do roviny) a čo tvar reálne predstavuje v priestore.

Spoločným menovateľom uvedených prác je dôraz na prepojenie vizuálneho a hmatového vnímania pri výučbe priestorovej geometrie. Výskumné zistenia naznačujú, že možnosť manipulovať s trojrozmerným modelom podporuje vytváranie presnejších mentálnych reprezentácií, redukuje omyly vyplývajúce z nesprávnej interpretácie dvojrozmerných náčrtov a zvyšuje mieru aktívneho zapojenia žiakov. Do budúcnosti plánujeme rozšíriť súbor úloh na ďalšie triedy priestorových útvarov (napr. hranoly, ihlany, rotačné telesá) a dopracovať metodickú dokumentáciu tak, aby bolo možné materiály systematicky implementovať do vyučovacieho procesu. Súčasťou plánov je aj vytvorenie online platformy umožňujúcej voľný prístup k šablónam a didaktickým odporúčaniam, ako aj realizácia rozsiahlejšieho empirického zisťovania účinnosti daného prístupu v rôznych prostrediach.

## PodĎakovanie

Tento článok vznikol s podporou grantu KEGA 038UK-4/2024 s názvom „Mnohovrstevný hybridný kurz elementárnej geometrie zameraný na učiteľov matematiky“, ktorého spoluriešiteľkou je autorka článku.

## LITERATÚRA

- [1] Papert S., Harel I.: *Situating constructionism*, In S. Papert and I. Harel (Eds.), *Constructionism* (pp. 1–11). Ablex, 1991.
- [2] Hall, R., Nemirovsky, R.: *Modalities of body engagement in mathematical activity and learning* [special issue]. *Journal of the Learning Sciences*, 21(2), 207–215, 2012.
- [3] Ng, O.-L., Ye, H.: *Doing Mathematics with 3D Pens: Five Years of Research on 3D Printing Integration in Mathematics Classrooms*, in *Learning Mathematics in the Context of 3D Printing*, Germany: Springer Spektrum, pp.~143--162, 2022.
- [4] Ng, O., Sinclair, N.: *Drawing in space: Doing mathematics with 3D pens*, In *Uses of technology in primary and secondary mathematics education* (pp. 301–313), Springer, 2018.
- [5] Piačková, D.: *Využitie 3D pera pri výučbe metrických úloh v stereometrii na SŠ*, Záverečná práca, FMFI UK, Bratislava, 2025.

- [6] Redechová, V.: *Využitie 3D pera pri výučbe rovinných rezov priestorových telies na SŠ*, Záverečná práca, FMFI UK, Bratislava, 2024.
- [7] Trubačová, M.: *Využitie 3D pera pri výučbe zobrazovania telies vo voľnom rovnobežnom premietaní na ZŠ*, Záverečná práca, FMFI UK, Bratislava, 2024.
- [8] <https://aukro.sk/3d-pen-25m-filamenty-vklady-napln-pla-mix-barev-napln-do-3d-pera-7091592660>
- [9] <https://www.nay.sk/3d-pero-polaroid-play-pre-rucnu-tlac-3d-modelov-3d-fp-pl-2005-00>

*RNDr. Barbora Pokorná, PhD.  
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky  
Univerzita Komenského v Bratislave  
Mlynská dolina  
842 48 Bratislava  
e-mail: barbora.pokorna@fmph.uniba.sk*